UNIVERSIDADE DE LISBOA

O pensamento algébrico na resolução de problemas com sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas em alunos do 8.º ano de escolaridade

Vanda Cristina de Caria Patrício

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
Orientado pela Profª. Doutora Leonor Santos
Coorientado pela Profª. Doutora Suzana Nápoles

2016

ao meu filho Vicente,

que diariamente me lembra a simplicidade da vida.

Agradecimentos

Em especial ao meu filho Vicente e ao meu marido Luís, pela paciência, compreensão, apoio e pelo tempo "roubado" à nossa família. E ao Pigmeu, uma companhia peluda.

À minha mãe Helena e ao meu pai António, pela ajuda e suporte incondicional que sempre me deram, pelas palavras de conforto e de encorajamento.

À minha irmã Raquel e à minha sobrinha Mariana, pelo apoio prestado e pela presença.

À minha avó Olímpia, que já partiu, mas que muito me *ensinou* sobre a vida.

À Maria Rita, e aos seus pais, cujo primeiro ano de vida foi pouco acompanhado.

À minha família que, de alguma forma, ficaram privados da minha presença.

À Diretora do Colégio Moderno, Dr.ª Isabel Soares, por toda a ajuda e amizade demonstradas ao longo de todos estes anos.

À minha orientadora, exemplo de força e de sucesso, Prof.ª Doutora Leonor Santos, por todo o apoio e encorajamento. Pela sua colaboração no melhoramento do ser humano que sou.

À Professora Cooperante Cláudia Torres, pelo caminho e experiências partilhadas, pela porta sempre aberta e pelas palavras de encorajamento. Exemplo de força e de sucesso.

À minha coorientadora Prof.ª Doutora Suzana Nápoles, por todo o apoio e saber científico partilhado. Às perguntas pertinentes e ao seu exemplo de sucesso.

Às duas Professoras, e Amigas, que me acompanharam ao longo destes anos do Mestrado, Prof.ª Doutora Ana Henriques e Prof.ª Doutora Hélia Oliveira. Pela dedicação e apoios manifestados, pelo exemplo de sinceridade, simplicidade e integridade que sempre me encheram o coração.

Ao Prof.º Doutor Henrique Guimarães que me mostrou um outro lado, mais belo, da Matemática. Pelo seu carinho e dedicação.

A todos os professores orientadores cuja porta encontrei aberta ao longo destes anos: Cláudia Torres, Anabela Candeias, Inês Campos e Paulo Alvega.

À minha colega e amiga Anália Rodrigues que tão diretamente me acompanhou nesta intervenção letiva, suporte importante para o sucesso desta experiência profissional e pessoal.

À minha amiga Cristina Santos, colega de curso EG, amiga da FCUL, que sempre esteve do outro lado de uma linha, sempre disponível e sempre com uma palavra de força. Exemplo de força e de coragem.

Às minhas colegas deste Mestrado, que se tornaram grandes amigas, que enumero pela ordem cronológica, Rute Gil, Teresa Braga, Ana Romão, Filomena Carreira e Anália Rodrigues.

A todos os colegas que se foram cruzando comigo e que de uma forma ou de outra, enriqueceram as minhas aprendizagens.

Aos meus amigos e colegas do Colégio Moderno Inês Peça, Maria Manuel, Susana Delgado, Sofia Laje e Carlos Melo pelo apoio, ajuda e encorajamento manifestados. E aos restantes colegas que, direta e indiretamente, me apoiaram nesta caminhada.

À minha colega e amiga Ana Rodrigues pelo ombro sempre disponível e pelas doces palavras dispensadas ao longo dos tempos.

À minha mãe, que é também minha colega de profissão, um muito obrigada por todo o esforço encorajamento para que este momento fosse possível.

Aos meus amigos que, de alguma forma, ficaram privados da minha companhia nos encontros sociais. Obrigada por não desistirem de mim.

À autora Carolyn Kieran pelo excelente trabalho de investigação que realiza e pela dispensa de todos os artigos que solicitei via *ResearchGate*.

A todos os autores que fazem investigação nesta área; pelos ensinamentos e sentimentos transmitidos nos artigos que li e que reli, tornando possível um enriquecimento humano e cultural sem tamanho.

Aos meus chefes Sr. Francisco Salgado, Rui Salgado e Luís Godinho; do escritório que trabalho deste que me formei em Engenharia Geográfica, pelas horas alteradas e dispensadas e pelo apoio e compreensão neste projeto pessoal que investi parte da minha vida. Aos meus colegas do escritório, pela paciência, apoio e encorajamento.

À Maria João Madeira, uma gentil pessoa da Secretaria do Instituto de Educação, que me ajudou burocraticamente em todo o meu percurso deste Mestrado.

A todos os que não foram mencionados mas que, direta ou indiretamente, estiveram ligados a mim neste projeto e que, de alguma forma, se cruzaram no meu caminho e que tornaram possível a realização deste projeto pessoal.

Por fim, e em modo de agradecimento especial, lembro todos os alunos da EB 2,3 Fernando Pessoa que me aceitaram tão bem nas suas salas de aula. Sem eles, este relatório também não teria sido possível.

Um grande obrigado a todos!

Resumo

O presente estudo pretendeu compreender o pensamento algébrico de alunos do 8.º ano de escolaridade na resolução de problemas com sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Com este intuito, procurei compreender os significados que atribuíram à simbologia matemática e quais as principais dificuldades que revelaram, apurar qual(is) a(s) estratégia(s) mais utilizada(s) na resolução de problemas e perceber as razões dessa escolha e, por fim, compreender as principais dificuldades associadas à tradução e à resolução de situações contextualizadas ou não.

O estudo assenta num paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem mista, usando dados quantitativos e qualitativos. Posicionei-me como observadora participante e os principais métodos de recolha de dados foram a observação direta, a recolha das produções escritas dos alunos, as entrevistas e um questionário anónimo. A turma esteve envolvida na realização das tarefas, no entanto, selecionei quatro pares de alunos para aprofundamento do estudo, aos quais realizei entrevistas em dois momentos da intervenção letiva. A análise dos dados seguiu a análise de conteúdo. As questões de natureza ética foram consideradas neste estudo.

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos desenvolveram o pensamento algébrico. A maioria revelou ter sentido de símbolo, estando a principal dificuldade ligada ao formalismo do método de substituição. O sentido de variável estava bem desenvolvido, mas os alunos apresentaram dificuldades na atribuição de significado à incógnita quando esta não era explicitada no enunciado. A representação algébrica foi a mais escolhida pelos alunos e a principal razão apontada para esta escolha foi o saber/controlar o que estavam a fazer. Os alunos demonstraram maior facilidade na interpretação e resolução de problemas de índole geométrica e nas situações descontextualizadas. A interpretação das situações dos problemas verbais que traduzem situações próximas ao quotidiano foram dificuldades acrescidas, não pelo contexto, mas sim pela definição das variáveis.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, sistemas de equações, sentido de símbolo, sentido de variável, representações.

Abstract

This study aimed to understand the algebraic thinking of students of the 8th grade in solving problems with systems of two equations of 1st degree with two unknowns. To this end, I sought to understand the meanings they attributed to the mathematical symbols and the main difficulties they revealed, in order to determine and understand which strategy(s) is/are most used to solve problems and the reasons for that choice and finally to recognize the main difficulties associated with the translation and resolution of contextualized situations or not.

The study is based on an interpretative paradigm, following a mixed approach, using quantitative and qualitative data. I positioned myself as a participant observer and the main data collection methods were direct observation, collection of written productions of the students, interviews and an anonymous questionnaire. The class was involved in the tasks; however, I selected four pairs of students for further study, to whom I conducted interviews in two moments of the teaching intervention. Data analysis followed the content analysis. Ethical issues were considered in this study.

The results obtained show that the students developed algebraic thinking. Most of them have revealed knowing the sense of symbol and the main difficulty shown is linked to the formalism of the replacement method. The sense of variable was well developed, but the students had difficulties in assigning meaning to the unknown when it was not made explicit in the statement. The algebraic representation was the most chosen by the students and the main reason given for this choice was the knowledge/control of knowing what they were doing. Students demonstrated greater competence in interpretation and resolution of geometric problems and decontextualized situations. The interpretation of the situations of verbal problems which translate situations close to everyday life were added difficulties, not due to the context, but due to the definition of the variables.

Key-Words: Algebraic thinking, systems of equations, sense of symbol, sense of variable, representations.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

1. Introdução

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

Numa primeira fase, apresento os objetivos e as questões orientadoras para o desenvolvimento do trabalho de cariz investigativo. Em seguida, apresento as motivações pessoais e o contexto que proporcionou a realização deste trabalho e, por fim, apresento a organização do presente documento escrito, resultado de um trabalho planeado, executado e analisado.

Objetivo e Questões Orientadoras

O presente estudo pretende compreender o pensamento algébrico que os alunos da turma 8.º 1.ª da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa, nos Olivais, evidenciam na resolução de problemas com sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. O estudo decorre durante a lecionação da unidade didática "Equações Literais. Sistemas de Duas Equações".

No sentido de concretizar o objetivo de investigação, formulo três questões que se tornam pertinentes quando os alunos trabalham a resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas:

(*i*) Que significados estes alunos atribuem à simbologia matemática? Quais as principais dificuldades que revelam?

(*ii*) Qual o tipo de representação que preferencialmente usam? Quais as principais razões invocadas para essa escolha?

(*iii*) Quais as principais dificuldades que manifestam na tradução dos dados de um problema para linguagem simbólica e na sua resolução?

As questões formuladas e a concretização do objetivo de estudo assentam num conceito principal que importa contextualizar, atribuindo um sentido a toda a pesquisa e trabalho a desenvolvido. O pensamento algébrico é um conceito relativamente recente. A Álgebra ocupou, durante muito tempo, o centro da atenção dos manuseamentos algébricos.

Contudo, deixou de ser encarada como um manusear de equações e manipulações de símbolos algébricos, passando a pensar-se em algo mais abrangente como o pensamento algébrico (Ponte, 2006). Esta mudança promoveu uma reestruturação no currículo escolar e, principalmente, no modo como se encaram as estruturas algébricas. Pode dizer-se que o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com cálculos algébricos, com funções e, a um nível mais avançado, a modelação e representação de estruturas matemáticas para resolver problemas de diversas naturezas (Kaput, 1999; NCTM, 2008). O quadro teórico e as questões de investigação serão desenvolvidos tendo em vista esta linha de pensamento, procurando uma orientação na interpretação dos resultados, no que diz respeito: *(i)* ao pensamento algébrico e seu desenvolvimento, *(ii)* ao sentido de símbolo e de variável, *(iii)* como as diferentes representações proporcionam aprendizagens significativas, (*iv*) à resolução de problemas, e como estes possibilitam o desenvolvimento dos primeiros e (*v*) quais as dificuldades sentidas pelos alunos nas várias fases do processo de aprendizagem.

Motivações Pessoais e Contexto do Estudo

A escolha do tema, para desenvolvimento do trabalho de cariz investigativo, prende-se com dois fatores, sendo um deles de importância significativa no meu percurso de vida. O primeiro, e o de maior importância, prende-se com a necessidade de melhor compreender a simbologia matemática e como esta é manipulada e compreendida pelos alunos (Booth, 1988). O sinal de igual é largamente utilizado de formas menos corretas por jovens com os quais me fui cruzando pelo caminho. Na minha perspetiva, estas manipulações tornam-se difíceis pela não clarificação do seu significado e de trabalhos menos bem conseguidos ao longo do percurso escolar de cada aluno (Kieran, 1981). Existem erros que perduram e que perturbam o bom desenvolvimento escolar dos mesmos, principalmente no que diz respeito à Matemática, tornando-se evidente que "o significado do sinal de igual é uma questão muito importante" (Berrincha & Saraiva, 2009, p. 3). Outros símbolos e letras são usados na Álgebra e com eles o formalismo aumenta. Se para uns a passagem da Aritmética para a Álgebra se faz tranquilamente, para outros a reconceptualização da simbologia, a introdução de novos símbolos e o sentido das letras traduz-se em dificuldades acrescidas (Both, 1988; Kieran, 1981). É, pois, no sentido de contribuir para a aprendizagem matemática destes jovens, que melhor pretendo compreender os significados da simbologia algébrica. Sendo a Álgebra um importante domínio da Matemática, soluções são alcançadas para resolver diversos problemas; facto que tem vindo a ser cuidadosamente explorado pelos investigadores. É encarada pelo NCTM (2008) como transversal, que lhe atribui o papel de "fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade" (p. 39). Esta transversalidade, na minha opinião, confere ao pensamento algébrico um cariz atrativo. Acredito que conhecendo um pouco do trabalho dos investigadores, poderei compreender melhor, ainda que de forma geral, as interpretações feitas pelos alunos. Este estudo permitir-me-á particularizar mais facilmente as dificuldades dos que me acompanharão no futuro. Pergunta-se porquê estudar o pensamento algébrico no tópico dos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. A razão, segundo fator da escolha, é a incidência do tema na planificação anual feita pela Professora Cooperante bem como o tempo que disponho para a preparação de aulas com a qualidade que os alunos merecem. Numa primeira fase, pensei escolher para este trabalho a subunidade referente aos casos notáveis da multiplicação de binómios, no sentido de conhecer e explorar as dificuldades relacionadas com os mesmos. É um tópico aliciante e que permitiria um bom desenvolvimento do pensamento algébrico, para a qual a capacidade de abstração é necessária. Contudo, devido à planificação anual realizada pela Professora Cooperante, não haveria tempo disponível para o planeamento das aulas. Desta forma, surgiu como a alternativa, para o desenvolvimento do pensamento algébrico e manuseamento da simbologia algébrica, o tópico dos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, que envolvem ainda a interpretação da conjunção de duas equações e o sinal de equivalência entre sistemas. A exploração das estratégias de resolução e das dificuldades dos alunos que envolvem esta temática (Booth, 1988; Kieran, 1981) torna a escolha aliciante, permitindo que este estudo se torne útil para o meu futuro e quem sabe para outros. O manuseamento algébrico toma contornos formais na resolução de sistemas de equações pelo método de substituição, conferindo uma aposta de interesse para o objetivo de estudo. A contextualização de situações problemáticas é outro fator aliciante que se enquadra muito bem neste tópico do currículo escolar do 8.º ano.

Organização do Estudo

O presente documento pretende descrever o estudo que tem por base as questões de investigação acima descritas. A organização por capítulos refere cada uma das etapas que o envolveu.

O capítulo que se segue, Enquadramento Curricular e Didático, engloba a revisão do estado de arte sobre o pensamento algébrico e como este se desenvolve a nível do currículo escolar. O foco foi estendido a conceitos ligados ao pensamento algébrico: sentido de símbolo e de variável, representações múltiplas, resoluções de problemas e dificuldades dos alunos nas várias vertentes do pensamento algébrico.

No terceiro capítulo, A Unidade Didática, faço a apresentação da proposta pedagógica. Englobo aspetos que caracterizam a turma a quem se destinam as tarefas e outros relacionados com a unidade didática a lecionar. Os recursos usados durante o período e lecionação e aspetos relacionados com a avaliação dos alunos são aqui também explicitados. Por fim, faço uma breve descrição das aulas, refletindo sobre o que foi planeado e o que aconteceu em sala de aula, apresentando um pequeno balanço final sobre a minha lecionação na globalidade.

O quarto capítulo, Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados, destina-se a explicitar as metodologias consideradas para o desenvolvimento do trabalho de cariz investigativo, os critérios de seleção dos participantes no estudo e os métodos de recolha de dados para análise, bem como algumas considerações de natureza ética.

No quinto capítulo, Análise de Dados, apresento parte dos dados recolhidos tendo em conta a problemática em estudo e a análise que fui fazendo à totalidade dos dados recolhidos.

Por fim, no capítulo Conclusões, apresento os principais resultados obtidos procurando responder às questões de investigação e faço uma breve reflexão sobre o trabalho desenvolvido no papel de professora-investigadora e na mais-valia que será para o meu trabalho futuro.

2. Enquadramento Curricular e Didático

"A competência matemática abre as portas a futuros produtivos; a sua ausência mantém-nas fechadas." (NCTM, 2008, p. 5)

A Matemática tem-se revestido de uma importância fundamental ao longo dos tempos. Tem vindo a evoluir e, ainda hoje, emergem novos conhecimentos, novas formas de comunicar e novas ferramentas (NCTM, 2008), algumas delas, consideradas imprescindíveis pela maioria dos cidadãos. No ensino, muitas são as mudanças e os paradigmas que o acompanham. O raciocínio matemático é, por excelência, o principal objetivo do ensino da Matemática; permitindo uma compreensão das situações matemáticas (Semana & Santos, 2008) cada vez mais importantes e presentes no nosso quotidiano (NCTM, 2008). Contudo, o raciocínio matemático ramifica-se em outros tipos de raciocínios, consoante o tema subjacente. A Álgebra é um dos grandes domínios da Matemática (Ponte, Branco & Matos, 2009) e, como tal, o raciocínio matemático subjacente é o pensamento algébrico; como é entendido nos dias de hoje.

Neste capítulo é feita uma breve revisão da literatura sobre o pensamento algébrico com foco na Álgebra escolar. Esta revisão serviu de base ao trabalho desenvolvido na lecionação da unidade curricular proposta e foi o meu fio condutor para, analisando os dados recolhidos, responder às questões de investigação. Assim, procurei orientar a minha pesquisa, enquadrando-a num pequeno trabalho de cariz investigativo e nos conceitos chaves que se relacionam com o pensamento algébrico. O primeiro conceito é a própria definição de pensamento algébrico que envolve outros conceitos como o sentido de símbolo e o de variável. Estes conceitos são abordados no subcapítulo seguinte, seguindo-se a exploração das representações múltiplas para expressar o pensamento algébrico desenvolvido. Este conceito destaca-se noutro subcapítulo pois as representações são importantes para a aprendizagem e compreensão dos sistemas de símbolos. Importa clarificar e compreender quais as múltiplas representações que envolvem o pensamento algébrico e como se relacionam entre elas e com a conceção do pensamento algébrico. A resolução de problemas, com foco no domínio da Álgebra, é uma das atividades que se tornou de grande importância na Matemática. Por essa razão e para responder às questões de investigação, destaca-se no subcapítulo consequente. Por fim, e porque não tem sentido pensar em processo ensino-aprendizagem sem pensar nas dificuldades dos alunos, é feita uma pequena revisão de literatura sobre as principais dificuldades que têm sido relatadas e sentidas pelos alunos no domínio da Álgebra escolar.

.

Pensamento Algébrico

A visão tradicional da Álgebra é redutora. Associa-lhe a resolução de equações algébricas, na qual estão envolvidas as variáveis (Canavarro, 2007; Kaput, 1999; Ponte, 2006). Esta visão pode ser entendida numa perspetiva histórica, em que as necessidades foram surgindo e a formalização e a sistematização de certos problemas foram também tornando-se imprescindíveis, remetendo-nos para as origens da Álgebra (Ponte, 2006; Ponte, Branco, & Matos, 2009). O surgimento das equações algébricas e os procedimentos automatizados de resolução, com manipulação da simbologia algébrica, ficaram associados à Álgebra por muito tempo. Contudo, "a Álgebra é mais do que a manipulação de símbolos" (NCTM, 2008, p. 39). Este domínio da Matemática passou a ser entendido com um modo de pensar, dando-lhe mais atenção no currículo escolar desde os primeiros anos, passando a ser entendido como um fio condutor do pensamento matemático. Assim, os objetos de estudo da Álgebra deixaram de ser as equações e respetivas manipulações simbólicas para passar a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico (NCTM, 2008; Ponte, 2006). Contudo, o seu desenvolvimento carece de compreensão das relações entre os objetos, da representação dessas relações e do raciocínio desenvolvido sobre as mesmas (Ponte, 2006).O pensamento algébrico "é o coração da instrução" (Blanton & Kaput, 2008) e inclui o estudo das estruturas, do simbolismo, da modelação e da variação (Kaput, 2008; Kieran, 1992; Ponte, 2006). As mudanças perspetivadas no ensino da Álgebra concretizam-se nas orientações curriculares que, segundo o NCTM (2008), devem ser desenvolvidas desde o ensino elementar até ao 12.º ano de escolaridade e devem abranger os seguintes aspetos:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2008, p. 39)

O grau de complexidade destas orientações deve ir aumentando com o nível de escolaridade do aluno. Muitos autores consideram que o início do pensamento algébrico ocorre com a Aritmética generalizada (Canavarro, 2007; Kieran, 1981; Molina, 2011; Oliveira, 2009), ou seja, com a exploração aritmética das operações e das suas propriedades bem como com as relações que se podem estabelecer entre os números, promovendo uma generalização de padrões numéricos (Canavarro, 2007; Matos & Ponte, 2008). Duas fases são consideradas para esta vertente da álgebra: iniciando-se por uma fase operacional, em que o valor desconhecido é considerado fixo e seguindo-se por outra estrutural, em que aquele pode variar (Kieran, 1981; Sfard & Linchesky, 1994). Kieran (1981) refere que os jovens, sensivelmente até aos 13 anos de idade, preferem estratégias da aritmética generalizada a uma análise relacional das expressões algébricas. Kaput (2008) considera que a aritmética generalizada é uma das vertentes mais comuns do pensamento algébrico no ensino elementar, juntamente com o pensamento funcional. Este último "envolve a generalização através da ideia de função (…) e implica a conceção das letras como variáveis" (Canavarro, 2007, p. 89). Smith (2008), por sua vez, considera outras duas vertentes para o pensamento algébrico: o pensamento representacional e o pensamento simbólico. O primeiro está ligado à generalização e é "reservado para designar os processos mentais pelos quais um indivíduo cria significados, num sistema de representações" (Canavarro, 2007, p. 88). O segundo analisa o "modo como o indivíduo compreende e usa o sistema de símbolos e as respetivas regras" (Canavarro, 2007, p. 88). O pensamento simbólico está focado no sistema de símbolos utilizado sem nenhuma atribuição de significado. O significado atribuído é garantido pelo pensamento representacional que, ao alcançar a generalização, compreende as relações das estruturas existentes (Smith, 2008).

Numa outra perspetiva, Ponte, Branco e Neves (2009) consideram três vertentes para caracterizar o pensamento algébrico: (*i*) representar, (*ii*) raciocinar e (*iii*) resolver problemas com modelação de várias situações. Na primeira vertente, incluem a capacidade de recorrer a múltiplas representações, nomeadamente à representação simbólica. Surge, assim, a evidência ao sentido de símbolo, realçando a necessidade da compreensão dos sentidos do mesmo símbolo nos vários contexto. Na segunda, consideram a capacidade de relacionar, de generalizar e de deduzir; realçando a importância dos raciocínios indutivo e dedutivo no desenvolvimento do pensamento algébrico. Na última vertente, em que consideram a resolução de problemas e a modelação de situações matemáticas ou de outro domínio, incluem a representação algébrica com recurso ao formalismo e ao rigor na interpretação das situações em causa. Considerando a estrutura global apresentada por estes autores, verifica-se que a mesma vai ao encontro das cinco facetas consideradas por

Kaput (1999) para definir o pensamento algébrico embora apresente uma estrutura mais pormenorizada, pelos processos que envolve. Assim, para este último, o pensamento algébrico pode ser definido pela consideração de processos, não isolados, de (*i*) generalização e formalização de padrões; (*ii*) de manipulação e de formalismos; (*iii*) de estudo de estruturas abstratas; (*iv*) de estudo de funções, relações e de variação conjunta e (*v*) a utilização de diferentes representações na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Estabelecendo uma análise comparativa, verifica-se que esta organização vai, por sua vez, ao encontro da norma apresentada pela NCTM (2008) para a Álgebra, apesar de ligeiras diferenças nos agrupamentos dos processos. O resumo comparativo, evidenciando as diferenças consideradas no agrupamento das características do pensamento algébrico, é mostrado no quadro seguinte (Quadro 2.1).

Quadro 2.1 *Resumo comparativo do conceito de pensamento algébrico*

<table>
<tr><th>NCTM (2008)</th><th>Ponte, Branco e Neves (2009)</th><th>Kaput (1999)</th></tr>
<tr><td>Compreender padrões, relações e funções.</td><td>(ii) Raciocinar: Capacidade de relacionar, de generalizar e de deduzir - raciocínio dedutivo e indutivo.</td><td>(i) Generalização e formalização de padrões.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos.</td><td rowspan="3">(i) Representar: Capacidade de recorrer a múltiplas representações, nomeadamente à simbólica.</td><td>(ii) Manipulação e formalismo do sistema de símbolos.</td></tr>
<tr><td>(iii) Estudo de estruturas algébricas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(v) Utilização de diferentes representações na modelação matemática e no controlo de fenómenos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas</td><td rowspan="3">(iii) Resolver problemas e modelar diversas situações: Representação algébrica com recurso ao formalismo e ao rigor na interpretação das situações em causa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(iv) Estudo de funções, relações e de variação conjunta.</td></tr>
<tr><td>Analisar a variação em diversos contextos.</td></tr>
</table>

Os autores referem-se aos mesmos processos levando-nos a concluir que o pensamento algébrico envolve ações como compreender, raciocinar, generalizar, relacionar, representar, modelar e analisar. Por outro lado, os mesmos autores referem-se a conceitos importantes que estão inerentes ao pensamento algébrico tais como o simbolismo e o formalismo. Esta análise permite-nos estabelecer um paralelo entre estas definições e outra apresentada por Kaput (2008), considerando dois aspetos nucleares para o pensamento algébrico. O primeiro refere-se ao simbolismo evidente nas generalizações com utilização de um sistema de símbolo convencional. O segundo refere-se à estrutura sintática e ao modo como esse sistema de símbolos é manuseado. Neste caso, o autor apresenta o estudo das estruturas abstratas, das funções e da modelação matemática como três ramificações (*strands*) do pensamento algébrico que incorporam os dois aspetos nucleares. Contudo, realça três tipos de modelação matemática que dependem da articulação dos aspetos nucleares. O primeiro tipo é a modelação de um problema aritmético que requer uma abordagem algébrica. Neste caso, utiliza-se uma equação e a quantidade desconhecida é considerada como uma incógnita. O segundo tipo pretende modelar um padrão/regularidade de um fenómeno. Neste caso, são utilizadas uma ou mais variáveis expressas por uma função ou por uma família de funções. Por fim, considera a modelação de situações de resposta simples que não requerem uma abordagem algébrica para sua resolução. Contudo, a abordagem algébrica dos problemas aritméticos, considerada aritmética generalizada por outros autores (Blanton & Kaput, 2008; Kieran, 1992), permite uma exploração matemática das situações. Nestes casos as variáveis são tomadas por parâmetros (Kaput, 2008).

Do acima exposto, distinguem-se dois tipos de pensamento que compõem o algébrico, o relacional e o funcional. Ambos podem ser desenvolvidos em anos escolares mais baixos e torna-se difícil fazer uma separação exata. Ao iniciar-se o desenvolvimento do pensamento algébrico mais cedo, possibilita-se aos alunos uma visão estruturada da aritmética, analisando-se as relações entre as quantidades. Há aqui um destaque para o desenvolvimento do pensamento relacional, em que são reconhecidas e utilizadas as relações entre os elementos de expressões numéricas/algébricas e das propriedades fundamentais das operações (Molina, 2011). Ao usar o pensamento relacional, os alunos encaram as expressões na sua totalidade e analisam as suas estruturas mais complexas em vez de procederem passo a passo; ou seja, evidenciam a passagem para a fase estrutural em vez de se manterem apenas na fase operacional (Kieran, 1992; Molina, 2011; Sfard & Linchevski, 1994). A mesma representação pode ser analisada pelas duas conceções, estrutural e operacional (ou processual como definem Sfard & Linchevski (1994), garantindo um aumento da compreensão e suportando uma transição com significado real para os alunos (Sfard & Linchevski, 1994). A passagem para a fase estrutural dá-se em duas fases. A primeira perspetiva a Álgebra como um valor fixo – incógnita – e em seguida a transição para a Álgebra como função – variável (Sfard & Linchevski, 1994). A teoria da reificação, apresentada por Sfard & Linchevski (1994), refere que a passagem da fase operacional para a fase estrutural ocorre em três etapas. As duas primeiras, lentas e graduais, são a interiorização e a condensação. Alguns processos são trabalhados como objetos matemáticos familiares, promovendo-se uma interiorização. Em seguida, os processos e operações tornam-se mais manejáveis, mas com maior capacidade de raciocínio, ocorrendo a condensação. Por fim, caracterizada por ser instantânea e comparada a um pulo, ocorre a reificação, que envolve a habilidade do aluno para encarar algo familiar de outra forma, ou seja, uma mudança que ocorre de forma súbita. Quando esta fase é alcançada, verifica-se nos alunos um decréscimo das dificuldades, potenciando-se a manipulação algébrica rigorosa.

Num estádio mais desenvolvido, os alunos transitam para uma conceção abstrata da Álgebra que emerge da junção de conhecimentos matemáticos que requerem novos processos com outros cujos processos são já bem conhecidos. A ideia de função surge aqui como uma ligação conceptual entre os cálculos numéricos e a manipulação algébrica formal (Sfard & Linchevski, 1994). Destaca-se o desenvolvimento do pensamento funcional que tem início, no ensino elementar, com a exploração de sequências e regularidades, culminando em generalizações por meio da noção de função e da conceção das letras como variáveis (Borralho & Barbosa, 2009; Canavarro, 2007).

Em síntese, as várias conceções apresentadas sobre o pensamento algébrico evidenciam a necessidade de esclarecer dois conceitos que envolvem o conceito de formalismo algébrico: "o sentido de símbolo" e "o sentido de variável". Importa clarificar aspetos relacionados com a promoção do desenvolvimento destes conceitos, perspetivando-se aprendizagens significativas dos alunos. Nos subcapítulos que se seguem serão desenvolvidos os dois conceitos referidos.

Sentido de Símbolo

A Álgebra não se reduz à utilização de símbolos, como acima se descreveu, mas não é possível minimizar a sua importância pois parte da Matemática não existiria sem eles (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Contudo, os símbolos não falam por si (Sfard & Linchevski, 1994). A linguagem algébrica permite exprimir ideias e relações matemáticas com rigor, tornando-se de grande utilidade na resolução de problemas (Arcavi, 1994; Booth, 1988; Matos & Ponte, 2008; Ponte, Branco, & Matos, 2009). A generalização é uma ação de grande relevo no pensamento algébrico e está associado à criação dos objetos simbólicos (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008). Porém, se na fase inicial não existir uma atribuição de significado a estes objetos, a grande potencialidade do simbolismo algébrico pode tornar-se incompreensível para o aluno e, assim, tornar-se uma fraqueza (Ponte, Branco, & Matos, 2009). No domínio da Álgebra, a simbologia pode ser considerada (*i*) algébrica, (*ii*) quase-algébrica ou (*iii*) não algébrica. As duas primeiras distinguem-se pelo uso exclusivo ou não da simbologia algébrica convencional, incluindo gráficos e sistemas dinâmicos, respetivamente. A atividade quase-algébrica, usada na maioria das salas de aula, possibilita uma conjugação entre representações que não o sistema convencional. Em processo de ensino-aprendizagem continuado, os sistemas de representação vão iterativamente melhorando até que o aluno atinge a representação algébrica convencional por excelência (Kaput, Blaton, & Moreno, 2008).

O sentido de símbolo, para Arcavi (2006), traduz-se numa atribuição de significado aos símbolos manipulados, possibilitada pela existência de uma cultura em sala de aula que o favoreça. As aprendizagens são geradas pela dualidade significado - utilização, ou seja, os alunos dão significado aos símbolos se os utilizarem. Para isso, é necessário usá-los, mesmo que numa primeira abordagem não exista total compreensão. É, para este autor, importante que o trabalho com os símbolos seja continuado e que as tarefas propostas possibilitem a apropriação do significado dos símbolos algébricos. Refere que é necessário tempo para vivenciar as aprendizagens e que os diálogos/discussões em sala de aula devem permitir uma exploração do sentido de símbolo, possibilitando aos alunos uma escolha consciente e apropriada para cada situação. Arcavi (1994) não define rigorosamente o sentido de símbolo mas apresenta uma lista de objetivos para o seu desenvolvimento. O professor deve ter a capacidade de promover tarefas que envolvam padrões, emergindo de representações numéricas ou gráficas (aritmética generalizada); que envolvam generalizações, comparando com termos de ordem n; que envolvam a exploração das representações em tabelas, gráficos ou linguagem natural para encontrar a lei de formação e a expressão algébrica de um padrão e, ainda, deverá ser capaz de antecipar várias estratégias de resolução de modo a determinar as mais apropriadas para cada questão (Arcavi, 1994). Relativamente ao aluno, alguns comportamentos evidenciam a sensibilidade que tem de sentido de símbolo (Arcavi, 1994; Arcavi, 2006). Inclui em primeiro lugar, a intuição na decisão de quando e como usar cada símbolo para descrever uma relação e aceitar ou rejeitar conjeturas. Em seguida realça as capacidades de manipular e de compreender a simbologia como aspetos complementares na resolução de problemas algébricos. Salienta que a análise global de uma relação pode, por vezes, ser a chave da resolução de um problema; mais do que o simples manipular algébrico. Destaca o exemplo da análise da relação da equação $(2x+3)/(4x+6)=2$ em que a compreensão da relação entre o numerador e o denominador levam a concluir que o primeiro é metade do segundo, logo a expressão não pode tomar o valor 2. Outro comportamento que evidencia sentido de símbolo é a habilidade de construir expressões algébricas por meio de outra representação, por exemplo a partir de uma representação gráfica o aluno consegue construir ou relacionar uma expressão algébrica que a represente. A capacidade de escolher uma forma de representação e refletir se é a melhor forma de a representar, refletindo sobre o seu significado ou nos significados das expressões equivalentes. Para exemplificar esta capacidade usa o exemplo da expressão $(a+b)/2$ em que o aluno atribui um significado a uma expressão equivalente e não a esta, ou seja, $a/2+b/2$ é a soma da metade de duas quantidades (Arcavi, 1994). Ou, por exemplo refletir sobre o melhor modo de representar 3 números consecutivos: se n, $n+1$ e $n+2$; se $n-1$, n e $n+1$ ou $n-2$, $n-1$ e n (Arcavi, 2006). Acrescenta à lista de comportamentos a consciência de que a escolha da representação para cada situação tem repercussões nos manuseamentos algébricos. Assim, quanto maior for o sentido de símbolo, maior será a intuição do aluno para a representação que otimize os cálculos algébricos, podendo reconhecer que não escolheu a melhor simbologia. Por fim, acrescenta a capacidade de reconhecer uma multiplicidade de significados dos símbolos nos seus contextos.

A simbologia matemática é, parte dela, usada já na Aritmética. Quando se dá a passagem para a Álgebra novos símbolos são introduzidos e outros sofrem uma mudança de significado (Kieran, 1992; Ponte, Branco, & Matos, 2009), dando lugar a uma "reconceptualização dos objetos matemáticos representados por símbolos" (Grossman & Ponte, 2011, p. 282). Neste sentido, Kieran (1981), ao analisar o sentido atribuído ao sinal de igual, estabelece duas perspetivas da Álgebra: (*i*) a processual (ou operacional) e (*ii*) a estrutural. Na primeira, este símbolo é visto como um operador, em que um cálculo é efetuado. Na segunda, ou seja, numa fase mais avançada do pensamento algébrico, o sinal de igual é já encarado como um símbolo relacional, em que as estruturas algébricas são analisadas e percecionadas as relações existentes entre elas.

Os símbolos algébricos não falam por si, é necessário interpretá-los à luz do contexto em que estão inseridos. Importa realçar que o aluno apenas perceciona aquilo que está preparado e que é capaz de perceber (Sfard & Linchevsky, 1994). Grossman, Gonçalves e Ponte (2009), citado por Grossman e Ponte (2011), desenvolveram um conjunto de indicadores referentes ao sentido de símbolo a ter em atenção na passagem da Álgebra operacional para a estrutural, subdividindo a informação em quatro categorias: expressões numéricas, equações, problemas e funções (Quadro 2.2). No presente trabalho, o sentido de *símbolo*, tal como os autores considerados, refere-se a todos os símbolos algébricos com exceção da letra, que será abordada em seguida.

Quadro 2.2 *Quadro de referência do sentido de símbolo*

Categoria	Indicadores
Expressões Algébricas	1. Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado 2. Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente. 3. Passar de uma estrutura concreta para uma mais 4. Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo.
Equações	1. Sentir o problema a partir da inspeção de símbolos. 2. Manipular simbolicamente utilizando procedimentos adequados. 3. Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado. 4. Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais. 5. Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Problemas	1. Decidir se é útil recorrer ao símbolo. 2. Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. 3. Interpretar o símbolo no contexto do problema. 4. Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas. 5. Generalizar.
Funções	1. Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas. 2. Escolher a representação simbólica adequada. 3. Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos. 4. Utilizar o símbolo para modelar situações. 5. Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes. 6. Utilizar o poder dos símbolos ara tomar decisões. 7. Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.

Nota. Grossman & Ponte, 2011, p. 303

Sentido de Variável

A maior diferença entre a Aritmética e a Álgebra reside no modo como são utilizadas as letras na representação de quantidades numéricas. As letras não têm um uso exclusivo da Álgebra pois são já usadas, embora de uma forma mais simples, na Aritmética. Contudo, a compreensão do papel que elas tomam na Álgebra carece de alguma abstração e deve ser tido em conta (Booth, 1988). Kücheman (1978) indica seis conceções para as letras usadas em Álgebra (Quadro 2.3). Ponte, Branco, e Matos (2009) consideram as três primeiras como rudimentares e as restantes como fundamentais no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 2.3 *Conceções para as letras usadas em Álgebra*

Igualdade	Designação	Sentido atribuído às letras
a+5= 8 a=?	Letra avaliada	É possível avaliar o valor de a imediatamente
$a+b$=43 $a+b$+2=?	Letra ignorada	Podemos ignorar o valor de $a+b$ para alcançar o resultado pretendido
P= 4l (Perímetro de um quadrado)	Letra como objeto	A letra é percebida como símbolo para um objeto concreto ou como o próprio objeto.
Figura com n lados de igual comprimento	Letra como incógnita	Representa um número específico mas desconhecido, com o qual é possível efetuar operações - Equações.
$c+d$=10 ∧ $c< d$ c=?	Letra como número generalizado	A letra é vista como um conjunto de valores e não como um só.
Qual é maior, $2n$ ou $n+2$?	Letra como variável	A letra é vista como um conjunto de valores mas é usada para descrever relações entre os conjuntos.

Nota. Adaptado de Kücheman, 1978

O conceito de variável é, para Usiskin (1999), multifacetado e depende do contexto. O autor apresenta cinco equações distintas que exemplificam os vários sentidos a atribuir às variáveis (Quadro 2.4).

Quadro 2.4 *Significados atribuídos a uma variável em função do contexto*

Igualdade	Designação	Sentido atribuído às variáveis
A= LW	Fórmula	Medidas de área, de comprimento e de largura
40= 5x	Equação	x é uma incógnita
sin x = cos x.tan x	Identidade	x é o argumento das funções trigonométricas
1=n.(1/n)	Propriedade	n é a generalização de um padrão aritmético
y= kx	Função	x é o argumento da função, y é o valor da função e k é uma constante

Nota. Adaptado de Usiskin, 1999

É com base nesta definição multifacetada de variáveis que Usiskin (1999) define as várias conceções do pensamento algébrico. Assim, de acordo com a importância que se dá às variáveis, podemos ter o pensamento algébrico: (*i*) como aritmética generalizada, (*ii*) como um conjunto de procedimentos para resolver certos problemas, (*iii*) como estudo das relações entre quantidades e (*iv*) como estudo de estruturas. Ursini (2011), tal com Usiskin (1999) tem uma visão da Álgebra que passa pela compreensão do conceito de variável e refere que o primeiro passo na aprendizagem formal da Álgebra escolar é compreender o uso das letras. Reconhece três ações distintas: (*i*) número generalizado, (*ii*) incógnita e (*iii*) variável. No primeiro caso, refere a álgebra generalizada, no segundo a utilização de equações e no terceiro a compreensão das relações funcionais. O Modelo 3UV (3 utilizações da variável), desenvolvido por Ursini e Trigueiros (2011), dá resposta a esta visão da Álgebra. Nele as autoras consideraram aspetos que caracterizam as três vertentes da Álgebra face ao uso da variável (Quadro 2.5). Neste trabalho será adotada a nomenclatura atribuída por estas autoras. Assim, o sentido de *variável* traduz a forma como a letra é considerada.

Quadro 2.5 *Modelo 3UV (3 utilizações da variável)*

Sentido de Variável	**Número Generalizado**	1. Atribuir valores à variável e obtêm resposta.
		2. Manipular simbolicamente por simplificação de expressões numéricas.
		3. Traduzir símbolos, frases ou regras.
	Incógnita	1. Capacidade de substituir símbolos por um ou mais valores que transformem a equação numa proposição verdadeira.
		2. Determinar o valor da(s) incógnita(s) que surge(m) numa equação ou problema, por aplicação das operações algébricas e/ou aritméticas adequadas.
		3. Reconhecer a presença de uma ou duas quantidades desconhecidas pode ser determinada atendendo aos dados fornecidos.
		4. Expressar a solução de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas como um par ordenado e reconhecer que este par ordenado é solução das duas equações em simultâneo.
	Variável numa relação funcional	1. Reconhecer a correspondência entre quantidades nas representações gráficas e/ou algébricas.
		2. Determinar o valor da variável independente dado o valor da variável dependente e vice-versa.
		3. Reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, qualquer que seja a sua forma de relação.

Nota. Ursini & Trigueiros, 2011

Representações Múltiplas

Do mesmo modo que o conceito da Álgebra escolar foi sofrendo evolução na sua conceção, destacando-se as modificações consideradas a nível do pensamento algébrico, considera-se a evolução sentida a nível da teoria da representação. As representações são uma forma humana de comunicar (Henriques & Ponte, 2010). Sendo a Álgebra um domínio particular do raciocínio humano, especificamente da Matemática, é natural que seja promovida em função das suas convenções. Contudo, o sistema alfanumérico e formal usado para desenvolvimento do pensamento algébrico é uma invenção recente se considerarmos o nascimento da Álgebra. O atual sistema de representação formal algébrico resulta de uma evolução cultural desenvolvido pelas necessidades dos Homens em representar as quantidades que foram surgindo (Radford, 2012). As antigas civilizações mobilizavam ideias algébricas sem utilizar notação; Kieran (1992) resume o desenvolvimento do simbolismo algébrico em três fases: retórica, sincopada e simbólica. Na primeira, os processos algébricos eram descritos por linguagem natural. É na segunda que se dá a introdução das letras como representantes das quantidades desconhecidas. A fase simbólica, caraterizava-se não só pela utilização de letras para as quantidades conhecidas (incógnitas) como pela formulação de regras para as relações numéricas (Kieran, 1992).

Saussure e Pierce (citado por Grossman, 2011; Presmeg & Radford, 2016) interessaram-se pelos signos e pelos significados que lhes são atribuídos, desenvolveram teorias que permitem analisar esta teoria, os sistemas semióticos. A semiótica, por definição, está interessada em compreender como são atribuídos os significados aos símbolos (Presmeg & Radford, 2016). Saussure (citado por Grossman, 2011; Presmeg & Radford, 2016) considerava os símbolos enquadrados num sistema, dando mais atenção às funções sociais; enquanto Pierce realçava os atributos internos dos símbolos, considerando que todo o pensamento seria um signo que possibilitava novos conhecimentos. Guirraud (citado por Presmeg & Radford, 2016) considerava que um signo era um estímulo que permitia a evocação de uma imagem mental, objetivando a comunicação. Por sua vez, Eco considerava o contexto o mediador entre o signo e o seu significado.

Surge, nos dias de hoje, o considerado triângulo semiótico com os seus três elementos: (*i*) o signo, significante ou símbolo; (*ii*) o objeto ou referente e (*iii*) o interpretante, significado ou sentido. O primeiro é o que transporta a característica do que vai ser representado, o segundo é o que o significante representa ou aquilo pelo que vai ser considerado e o terceiro é o veículo que possibilita que o significante faça sentido para o sujeito (Grossman, 2011).

Duval (1993, 2006, 2011) questiona quais os sistemas cognitivos que dão acesso aos objetos matemáticos. Serão comuns a outras áreas do conhecimento ou específicos para a Matemática? Os objetos matemáticos necessitam de representantes pois não são objetos reais nem físicos. Contudo, atinge-se um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: por um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não é mais do que uma apreensão conceitual, por outro lado, é simplesmente por meio de representações semióticas que a atividade se torna possível. Duval (1993, 2006, 2011) refere que este paradigma não é muito percetível a nível do ensino porque não há tanta preocupação com as representações semióticas mas sim com as representações mentais. Estas últimas referem-se à conceitualização que cada aluno faz de um conceito/objeto/situação, enquanto as semióticas recorrem aos símbolos para exteriorizar as representações mentais, tornando-as visíveis e acessíveis a outros, por meio de uma seleção de regras de conformidade. Concentrando a atenção em processos matemáticos e na importância da representação semiótica, dois tipos de transformações de registos semióticos são considerados: (*i*) os tratamentos e (*ii*) as conversões. Os primeiros são transformações de representações que ocorrem no mesmo registo, são internas ao registo; as segundas são externas, ocorrem entre registos distintos com o mesmo objeto, podendo conservar apenas parte do registo inicial. Os tratamentos são os mais importantes do ponto de vista da Matemática, enquanto as conversões são decisivas para a aprendizagem (Duval, 1993, 2006, 2011). Cada representação descreve uma (ou mais) característica do objeto que outras não permitem. Assim, as diferentes perspetivas permitem um conhecimento mais profundo do objeto. A capacidade, dos alunos, de transformarem a informação de uma representação numa outra, é traduzida pela compreensão do conceito (Tripothi, 2008).

Radford (2012), tal como Duval (2011), investiga sobre as dificuldades dos alunos por meio da atividade que estes realizam. Enquanto o segundo foca a sua atenção nas representações e nas transformações que os alunos são capazes de realizar, o primeiro foca a sua investigação na compreensão da aquisição do saber por meio de relações culturais depositadas nos artefactos que participam nos sistemas semióticos. Neste caso, a compreensão dos símbolos algébricos é feita com base na perceção da dimensão histórica a contemporânea depositada nos símbolos. Esta é uma atividade cognitiva que acarreta dificuldades acrescidas aos alunos pois a carga histórica dos símbolos não é transparente (Grossman, 2011). Esta dificuldade pode ser ultrapassada pela envolvência do aluno no processo de dar sentido aos símbolos, por meio da designada teoria da objetivação, que não é mais do que o processo de tornar algo transparente. Uma tomada de consciência progressiva por meio de uma atitude reflexiva de caráter social que, quando levada para a sala de aula, pretende a objetivação do saber, devendo ser complementada com a prática sistematizada. Ao professor cabe definir o conjunto de ações de modo a que a atividade social possibilite a objetivação da atribuição de sentido ao símbolo (Grossman, 2011; Radford, 2012).

Goldin (2008), por sua vez, considera as representações um elemento crucial no processo de ensino-aprendizagem. Confere ao ensino da Matemática um propósito social e considera que diferentes representações, no mesmo sistema, encontram-se relacionadas entre si dando informações ricas sobre o objeto em representação. Goldin (2008) classifica as representações como (i) internas e (ii) externas aos alunos. As construções mentais dos alunos correspondem a representações internas, enquanto as externas podem ser desde sistemas convencionais, com recursos aos símbolos, a ambientes de aprendizagens estruturados, como é o caso da interação de materiais manipuláveis. As interações entre as representações internas e externas contribuem eficazmente para o processo de ensino-aprendizagem. Esta interação pode conduzir à existência de ambiguidades que, por sua vez, podem conduzir a obstáculos cognitivos (Goldin & Shteingold, 2001) uma vez que cada representação descreve um ou mais aspetos do objeto em representação. A articulação entre as representações possibilita várias perspetivas, possibilitando um conhecimento mais aprofundado do objeto e potenciando o processo ensino-aprendizagem (Tripothi, 2008). Os sistemas de representação externa são estruturados de acordo com as convenções que lhes são subjacentes, podem ser considerados estáticos (gráficos, fórmulas, equações, diagramas estáticos, etc.) ou dinâmicos (produtos da calculadora gráfica, ambientes computacionais, etc.). Os sistemas de representação interna, mais difíceis de aceder pelo professor, carecem de modelos ou de referências que permitam caracterizar as atividades cognitivas do aluno; ou seja, que permitam compreender as suas representações mentais. Goldin & Shteingold (2001) consideram quatro sistemas de representação internos: (i) os de representação verbal, (ii) os de representação imagética, (iii) os de representação formal e os (iv) os afetivos. Goldin (2008) acrescenta o sistema de planeamento, monitorização e controle executivo, que guia a resolução de problemas. Todos estes sistemas, não sendo passíveis de análise direta, recorrem de inferências feitas pelo professor com base nas características de cada um (Quadro 2.6).

Os mais negligenciados são os imagéticos e o afetivo (Goldin, 2008). Os sistemas de representação imagéticos potenciam a compreensão e o discernimento matemáticos (Goldin & Shteingold, 2001) pela facilidade e eficácia dos aspetos visuais (Friedlander & Tabach, 2001). Quantos aos sistemas afetivos, a compreensão e o empenho podem ser melhorados ou impedidos pela intervenção do afeto nas tarefas de sala de aula (Goldin & Shteingold, 2001).

Quadro 2.6 *Caracterização dos sistemas de representação interna*

Sistema de representação	Características
Verbal / sintático	▪ Incluem a linguagem natural.
Imagético	▪ Incluem configurações visuais ou espaciais; ▪ Incluem codificação cinestésica, relacionada com a gesticulação e movimentos corporais; ▪ Incluem construções internas auditivas e rítmicas.
Formal	▪ Incluem a visualização de passos simbólicos na resolução de procedimentos externos formais
Afetivo	▪ Incluem as emoções dos alunos em mudanças, crenças, atitudes e valores.
Planeamento e monitorização	▪ Incluem capacidades de raciocínio, heurísticas e metacognitivas que guiam a resolução de problemas.

Nota. Adaptado de Goldin & Shteingold, 2001 e Goldin, 2008

O modelo de representações considerado pelos autores caracteriza-se por ter uma natureza dupla, ou seja, por vezes é útil pensar no externo como representando o interno e outras vezes é útil pensar no interno como representante do externo (Goldin & Shteingold, 2001; Goldin, 2008). Goldin e Kaput (referidos por Goldin & Shteingold, 2001) identificam três fases para os desenvolvimentos considerados nos sistemas de representação: (*i*) uma etapa inventiva ou semiótica, na qual novos caracteres são considerados para simbolizar um significado do indivíduo; (*ii*) uma etapa de desenvolvimento estrutural, na qual o sistema criado na fase anterior é usado para modelar um novo sistema com manuseamento de regras para o novo símbolo e, por fim, (*iii*) a fase autónoma, na qual o sistema é considerado autónomo porque um novo conhecimento e interpretação ficou concluído além do sistema original.

A pesquisa em representação preenche uma lacuna que considera, num polo, aqueles que favorecem as habilidades matemáticas por meio de resposta e raciocínio corretos e aqueles que, estando no polo oposto, valorizam as descobertas dos alunos e as diferentes estratégias de resolução (Goldin & Shteingold, 2001). Os investigadores questionam-se quanto ao modo como podem melhorar os desempenhos dos seus alunos de modo a melhorar todo o processo de ensino-aprendizagem. São unânimes em considerar que as tarefas devem ser estruturadas de modo a possibilitar diferentes tipos de atividade e diferentes tipos de representação (Arcavi, 2003; Duval, 2006; FriedLander & Tabach, 2011; Goldin, 2008; Henriques & Ponte, 2010) mas Webb, Boswinder e Dekker (2008) apresentam um modelo, desenvolvido por Fredenthal Institute for Teachers in the Netherlands, que mostra e organiza os vários tipos de atividade matemática para se alcançar a representação formal. É um modelo que corresponde a uma metáfora distinguindo o papel das representações informais, preformais e formais. O iceberg é a figura escolhida para representar a formalização progressiva das representações – *Iceberg Model* (Figura 1). Desta forma o topo do *icerberg* simboliza as representações formais e/ou simbólicas que se pretende que os alunos alcancem com compreensão. A parte do *iceberg* que permanece escondida, muito maior que o topo visível, simbolizam as representações informais e preformais que são necessárias para que o topo seja alcançado. Este modelo foi concebido com a preocupação de uma educação significativa para alunos com necessidades educativas especiais mas os autores referem que este é indicado para todos os alunos e cabe ao professor conceber o *iceberg* de acordo com o que se pretende para cada nível escolar. Esta construção tem como propósito a reflexão sobre a importância das representações e como se relacionam entre si. A atitude reflexiva permitira elaborar um modelo que se refletirá nas tarefas e nas discussões levadas em sala de aula (Webb, Boswinder, e Dekker, 2008).

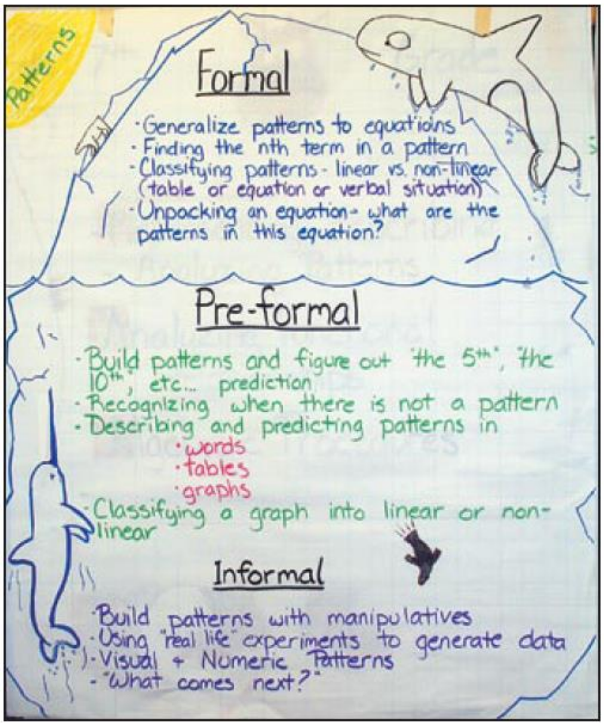


Figura 2.1 - Iceberg Model – Papel das representações informais, preformais e formais (Webb, Boswinder & Dekker, 2008, p. 112)

As orientações curriculares apresentadas para as representações vão no mesmo sentido do que o apresentado pelos vários investigadores, sendo estas:

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas
- Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos. (NCTM, 2008, p. 39)

Importa ao professor ter conhecimento das vantagens e desvantagens de cada tipo de representação. Ao aluno é possibilitado que atenda ao estilo individual do seu pensamento ao promover a representação que melhor acredita responder às suas necessidades. A combinação das representações pode anular as desvantagens das representações e potenciar a estratégia escolhida, sendo, por isso, uma ferramenta eficaz na resolução de problemas (Friedlander & Tabach, 2001). A compreensão de um conceito emerge das diferentes perspetivas de observação, possibilitado pela utilização das diferentes representações uma vez que não 'transmitem' o objeto da mesma maneira (Tripathi, 2008).

Se pensarmos na Álgebra tradicional e no pensamento algébrico, como é atualmente encarado, as representações validadas em cada uma são um aspeto que as distancia. No segundo aceitam-se as representações simbólicas convencionais, da Álgebra tradicional, mas também outras como tabelas, gráficos, reta numérica, diagramas e linguagem natural (Canavarro, 2007). Na Álgebra retórica (como os historiadores denominam a Álgebra praticada pelos Babilónicos) também foram encontrados registos desta natureza, evidenciando semelhanças com a evolução do pensamento algébrico, cuja definição se encontra mais alargada e rica do que a Álgebra dita tradicional, que dá grande valor à simbologia e à formalidade dos procedimentos de resolução (Canavarro, 2007; Sfard & Linchevsky, 1994). É necessário não perder de vista que "as representações matemáticas não são apenas meios de comunicação, mas igualmente de construção de conhecimento" (Santos, 2015, p. 4). O entendimento do pensamento algébrico por Kieran (2007) engloba um conjunto alargado de representações, para além linguagem simbólica, com o objetivo de compreender, de modo relacional, situações quantitativas. Friedland & Tabach (2001) evidenciam algumas características das representações verbais, numéricas, gráficas/visuais e algébricas/simbólicas; mais usuais no contexto escolar (Quadro 2.7).

Quadro 2.7 *Características dos tipos de representações mais usuais no contexto escolar*

Tipo de Representação	Características
Verbal	▪ Cria um ambiente natural para compreensão do contexto; ▪ Ferramenta útil para resolução de problemas; ▪ Enfatiza conexão entre diferentes domínios do quotidiano; ▪ Pode tornar-se ambígua e provocar associações enganosas; ▪ A subjetividade pode tornar-se um obstáculo na comunicação matemática.
Numérica	▪ É familiar aos estudantes; ▪ O uso dos números pode ser vantajoso para compressão inicial de um problema; ▪ Ferramenta limitada na resolução de problemas pois não acede à generalização.
Gráfica	▪ Fornece uma imagem clara; ▪ Os gráficos são intuitivos e atraentes para a maioria dos alunos; ▪ Não é um método de precisão (se manual) ▪ É influenciado por fatores exteriores (ex. escala); ▪ É limitado na apresentação (visualização de parte do domínio).
Algébrica	▪ É concisa; ▪ Eficaz na apresentação de padrões e de modelos; ▪ Por vezes é a única forma de provar um resultado; ▪ O seu uso exclusivo pode obstruir o significado na interpretação

Nota. Adaptado de Friedland & Tabach, 2001

A representação visual é realçada em relação às restantes representações e é reconhecida como uma chave importante no raciocínio, na resolução de problemas e nas demostrações matemáticas (Tripothi, 2008). Três funções são apresentadas para a visualização no processo de ensino-aprendizagem (Arcavi, 2003): (*i*) é um bom suporte e um bom meio de ilustrar resultados essencialmente simbólicos, (*ii*) permite a resolução de conflitos entre soluções corretas e intuições incorretas e (*iii*) ajudam a recuperar fundamentos conceptuais que são facilmente contornados pelas resoluções formais. Os diagramas, por exemplo, permitem aos jovens uma representação visual, dando visibilidade à estrutura do seu pensamento (Diezman & English, 2001, citado por Canavarro, 2007). As tabelas são ferramentas de grande utilidade ao pensamento algébrico. Permitem a organização visual dos valores numéricos e a apreciação da sua variação, ou seja, funcionam como o elo de ligação entre a Aritmética, com os números específicos, e a Álgebra, explorando as relações entre os números (Canavarro, 2007; Gafanhoto & Canavarro, 2012). Os gráficos, representação algébrica convencional, representam valores numéricos que, desde que elaborados com significado, permitem analisar as variações e completam o que as tabelas revelam (Carraher, Schilemann, & Schawrtz, 2008, citado por Canavarro, 2007).

Resumindo, as representações múltiplas ampliam "as hipóteses de os alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação" (Canavarro, 2007, p. 106). Desta forma, as representações não simbolizam uma finalidade mas um meio para compreender e trabalhar os conceitos matemáticos. É importante que os alunos mais jovens sejam incentivados a criar as suas próprias representações e que a formalização das representações vá crescendo com o nível de escolaridade (NCTM, 2008).

Resolução de Problemas

A valorização da tarefa como meio de aprendizagem é importante se a atenção estiver centrada no aluno e na atividade matemática que este produz (Ponte, 2005;Ponte et al., 2015). As tarefas devem ser diversificadas e adequadas à atividade matemática que se pretenda promover junto dos alunos. Desta forma, a escolha de boas tarefas é um dos grandes desafios que se coloca ao professor. Elas devem promover o envolvimento dos alunos, conduzindo-os a aprendizagens significativas (Ponte, 2005; Ponte et al., 2015). A resolução de problemas corresponde a um dos tipos de tarefa que foi ganhando visibilidade nos currículos escolares, permite centrar a atenção na atividade do aluno (Ponte, 2005; Ponte et al., 2015) possibilitando o desenvolvimento do raciocínio matemático. Schoenfeld (1996) refere que o foco do seu ensino não era apenas a resolução de problemas mas sim o pensar matematicamente. Define este tipo de pensamento como encarar o mundo segundo uma perspetiva matemática (modelar, simbolizar, abstrair) e ter ferramentas para a conceber com sucesso.

A definição de problema é uma das dificuldades que tem sido abordada nas investigações realizadas pelos diversos autores. Contudo, "o que está escrito no enunciado da tarefa não determina a respetiva natureza, sendo importante saber qual o conhecimento prévio dos alunos" (Ponte et al, 2015, pp. 130-131). A noção de problema, que tem influenciado vários documentos curriculares, está diretamente ligada às ferramentas que os alunos dispõem para resolver (Ponte, 2005; Ponte et al, 2015). Não existe uma definição única de problema mas alguns requisitos devem ser cumpridos para que uma tarefa seja considerada um bom problema. Schoenfeld (1996) realça quatro propriedades que considera importantes: (*i*) acessibilidade, ou seja, clareza na sua compreensão, (*ii*) existência de múltiplas soluções de modo a promoverem conexões entre os vários conceitos/representações matemáticas, (*iii*) permitir a introdução de temas matemáticos promovendo um maior interesse por parte dos alunos e (*iv*) possibilitar a exploração matemática de modo a levar os alunos a "fazer Matemática" (p. 10).

A resolução de problemas desenvolve o pensamento algébrico e é considerada, por alguns autores, uma das suas vertentes (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Esta atividade promove a utilização de diferentes representações e possibilita que se estabeleçam conexões entre elas, tornando as aprendizagens significativas (Dufor-Janvier, Bednarz & Bélanger, 1987, citado por Nobre, Amado, & Ponte, 2011). Preston e Garner (2003), citado por Nobre, Amado, & Ponte (2011), consideram as várias representações utilizadas pelos alunos na resolução de problemas (Quadro 2.8).

Quadro 2.8 *Representações usadas pelos alunos na resolução de problemas.*

Tipo de representação	Descrição
Linguagem natural	Explicar o raciocínio e as estratégias, como complemento de outro modo de representação
Pictórica	Recorre a desenhos ou imagens para apresentar, conjugar e sintetizar a informação
Aritmética	Estratégias de tentativa e erro, de desfazer ou de uso de tabelas
Gráfica	Utilização de gráfico de variáveis discretas ou contínuas, mostrando a variação
Algébrica	Utilização linguagem simbólica para generalizar

Nota. Adaptado de Nobre, Amado & Ponte, 2011

As diferentes representações matemáticas são uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas pois permite diferentes perspetivas sobre o mesmo objeto/conceito e uma resolução mais adequada ao seu estilo (Henriques & Ponte, 2010; Friedlander & Tabach, 2001). Problemas que permitem diferentes representações potenciam a compreensão dos conceitos uma vez que conferem diferentes perspetivas do mesmo (Tripathi, 2008). A formalização da escrita algébrica não deve ser exigida sem antes se ter trabalhado representações informais e preformais. A resolução de problemas são tarefas que possibilitam este desenvolvimento progressivo na formalização algébrica (Kieran, 2006). Kieran (1992) apresenta, para a representação algébrica, um conjunto de estratégias para a resolução de uma equação do 1.º grau (Quadro 2.9) que são utilizadas pelos alunos com grau de formalidade variável.

Quadro 2.9 *Estratégias de resolução de uma equação do 1.º grau*

Designação	Descrição
Uso da realidade	Para resolver 5+*b*=8 usa-se o facto de 5 mais 3 ser 8.
Uso de técnicas de contagem	Para resolver 5+*b*=8, conta-se 5, 6, 7, 8, portanto são necessários 3 para ir do 5 ao 8.
Cobertura *(cover-up)*	Para resolver a equação 2*x*+9=5*x*, considera-se que 2*x*+3*x*=5*x*, logo 3*x* tem de ser 9. Assim *x* é 3.
Desfazer (*undoing*)	Para resolver a equação 2x+9=18, começa-se pelo lado direito e, usando a ordem da direita para a esquerda, desfaz-se a operação.
Substituição por tentativa e erro	Para resolver a equação 2x+15=13, tenta-se com diferentes valores até encontrar o correto.
Transposição	Transposição de termos de um membro para outro, com mudança de sinal.
Realização da mesma operação em ambos	Para resolver *x*+10=25 é equivalente a *x*+10-10=25-10

Nota. Adaptado de Kieran, 1992

A contextualização é outra característica que pode ser trabalhada com os problemas. Esta é muitas vezes confundida com a definição de problema, como tarefa matemática, independentemente da preparação do aluno. Este é um entendimento incorreto pois um problema não precisa de ser contextualizado para o ser. Contudo, Goldin (2008) refere que para os alunos que iniciam o estudo da Álgebra, a contextualização (*i*) é largamente compartilhada; (*ii*) baseia-se nas vivências dos alunos e, por isso, fáceis de referenciar; (*iii*) tem codificações variadas e, por isso, conduz a uma elevada redundância, (*iv*) desenvolve-se primeiro que a matemática e (*v*) é culturalmente incentivada. A contextualização pode servir de modelo às representações matemáticas, importantes na resolução de problemas, mas pode também tornar-se um obstáculo cognitivo quando se pensa na abstração matemática. Por outro lado, a descontextualização, ainda que numa tarefa desafiante, pode favorecer o alcance da abstração, correndo-se o risco de cair numa aprendizagem sem significado para o aluno pois "representações descontextualizadas não são o mesmo que abstração" (Goldin, 2008, p. 187). O processo de abstração envolve um processo de autonomia do sistema de representação e a contextualização é uma espécie de complemento deste processo. A contextualização direciona o raciocínio dos alunos do particular para o geral, ou seja, apropriam-se do conceito para um caso específico e depois generalizam com o poder da abstração. Por sua vez, a abstração caminha em sentido contrário, ou seja, do geral para o particular (Goldin, 2008).

A contextualização é transmitida por meio de várias representações, usando os sistemas referidos anteriormente. Kieran (2006) refere que os problemas verbais são muitas vezes resolvidos por métodos aritméticos. A utilização de equações é muitas vezes uma dificuldade acrescida na resolução deste tipo de problemas. Porém, acrescenta que os métodos aritméticos não são um obstáculo ao pensamento algébrico mas sim uma forma de o desenvolver com significado.

As orientações curriculares vão ao encontro do que é destacado pelos diversos investigadores e preconizam que o ensino deve permitir:

- Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas
- Resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos
- Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas
- Analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas. (NCTM, 2008, p. 39)

Dificuldades dos Alunos

A passagem da Aritmética para a Álgebra acarreta algumas dificuldades para os alunos se pensarmos *capacidade de abstração* que é necessário desenvolver, passagem de um entendimento operacional para um estrutural (Sfart & Linchevsky, 1994). Tendo em vista a redução destas dificuldades, o desenvolvimento do pensamento algébrico começou a fazer-se mais cedo ("*Early-Algebra*"), através da aritmética generalizada, pois vários estudos (referidos em Molina, 2011) mostraram que os alunos mais novos têm capacidade de raciocinar de modo algébrico se a cultura em sala de aula for propícia ao seu desenvolvimento (Arcavi, 2006; Molina, 2011). Este desenvolvimento é feito objetivando uma aprendizagem com maior compreensão, mais completa e mais profunda (Molina, 2011) e uma maior facilidade no estudo da Álgebra no Ensino Básico (Kieran, 1992). Ainda antes de se entrar na Álgebra formal, a fase pré-algébrica suaviza a transição que outrora ocorria da Aritmética para a Álgebra, uma vez que promove o raciocínio algébrico iniciando as formalidades dos sistemas de símbolos (Molina,2011).

Both (1984), citado por Matos e Ponte (2008), classifica as dificuldades em três áreas principais: (*i*) a *interpretação das letras nos vários contextos*, (*ii*) a *formalização inerente aos métodos algébricos* e (*iii*) a *compreensão das notações e convenções próprias da Álgebra*. Contudo, Booth (1988) acredita que para compreender as dificuldades dos alunos é necessário identificar os erros que estes cometem. Entrevistas realizadas a vários alunos permitiu-lhe identificar as principais fontes de erros: (*i*) o foco da atividade algébrica e a natureza das respostas, (*ii*) a compreensão das notações e convenções próprias da Álgebra, (*iii*) a interpretação das letras nos vários contextos e (*iv*) os tipos de relação e os métodos utilizados em Álgebra.

Kieran (1981) evidencia as dificuldades na interpretação do sinal de igual na passagem da Aritmética para a Álgebra, referindo que os jovens recorrem, sempre que possível, à Aritmética generalizada. É importante que ocorra uma *reconceptualização do significado do sinal de igual*, deixando de o encarar apenas como uma igualdade ou uma operação mas também como um símbolo relacional. Esta mudança nem sempre é fácil e propicia, mais tarde, dificuldades no manuseamento algébrico (Kieran, 1992). No que diz respeito às equações do 1.º grau, são vários os erros e dificuldades pesquisadas pelos diversos autores (Quadro 2.10).

Quadro 2.10 *Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau*

Designação	Exemplo	Descrição
Eliminação	$39x-4=35x$	Generalização excessiva de algumas operações matemáticas
Troca de membros (*switching addends*)	$x+37=150 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=37+150$	A troca de membros é feita sem acerto das quantidades
Redistribuição *(redistribution)*	$x+10=25 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+10-10=25+10$	Os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo
Adição incorreta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -7x=8$	Erros aritméticos que não atentam aos valores das parcelas
Adição incorreta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7x=9$ $3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Erros aritméticos que não atentam aos monómios semelhantes
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Erros aritméticos que ignoram a presença dos parêntesis
Interpretação incorreta de monomios do 1.º grau	- Quatro "*y*'s"; - Um número com 4 dezenas e um número desconhecido de unidades; - 4+y por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$	Erros aritméticos resultantes de uma interpretação errónea no monómio com parte numérica e parte literal
Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação (operacionais)	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$ $3+5=8+2=10$	Erros algébricos resultantes da falta de interpretação da reconceptualização dos símbolos algébricos
Não iniciar a resolução de uma equação	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ?$	Não tem intuição sobre os símbolos e não sabe o primeiro passo a dar
Não respeitar que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número	$2x+4x=10$ $x=1$ e $x=2$ $2\times1+4\times2=10$	Não tem sentido de variável e faz interpretação errónea das variáveis existentes

Nota. Adaptado de Arcavi, 2006; Both, 1988 e Kieran, 1992

Com a progressão na aprendizagem da resolução de equações do 1.º grau, a *complexidade dos cálculos aritméticos* vai-se intensificando o que pode proporcionar dificuldades acrescidas, nomeadamente alterações nos coeficientes numéricos, a introdução de parêntesis e expressões com denominadores, ou seja, dificuldades de natureza aritmética (Ponte, Branco, & Matos, 2009). A complexidade aumenta ainda mais com o surgimento das *equações literais*, dificuldade de natureza algébrica. O *papel que cada letra* representa na equação e a necessidade de *reescrever equações equivalentes* para resolver o problema são duas das dificuldades realçadas. Se as variáveis não estão isoladas, as letras têm o mesmo papel e estamos perante uma equação com o sinal de igual com papel simétrico, duas expressões que representam o mesmo valor. Se uma das variáveis está isolada, a função é explícita com identificação imediata das variáveis independente (x) e dependente (y). Nesta situação, o sinal de igual é assimétrico e "y ou $f(x)$ são designações para o resultado dos cálculos efetuados pelo processo f, aplicado ao objeto x" (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 105).

3. A Unidade Didática

“A Matemática é um sorriso que surge do mundo da inteligência.”
Anónimo (aluna do 2.º ciclo)

Os sistemas de duas equações do 1.º grau com as duas incógnitas foi a unidade didática escolhida para desenvolvimento deste trabalho. Está inserida na Unidade “Equações literais. Sistemas de duas equações”. O desafio foi construir uma proposta pedagógica que, com base no quadro teórico desenvolvido, promovesse aprendizagens significativas nos alunos da turma 8.º 1.ª da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa. Tendo em vista que a escolha das tarefas e a planificação das aulas deve atentar às características dos alunos da turma (Ponte, 2005), comecei, numa primeira fase, por elaborar uma caracterização da turma que permitisse enquadrar a adequabilidade da posposta pedagógica. Numa segunda fase, enquadrei a subunidade didática no Programa de Matemática (ME, 2013) em vigor, abordando os principais conceitos e tópicos que a compõem. Neste capítulo justificarei igualmente as estratégias de ensino escolhidas, explicitando os objetivos de aprendizagem visados, bem como os conceitos fundamentais trabalhados com os alunos na unidade escolhida. Será apresentada a proposta pedagógica que elaborei, relatando a sequência de tarefas programada, seus objetivos e respetivas planificações bem como os recursos considerados na planificação. Por fim, farei uma descrição sucinta das aulas lecionadas comparando-as com as planificações elaboradas e abordarei alguns aspetos relacionados com as possíveis alterações às tarefas ou à sequência de tarefas planeadas, resultantes de uma reflexão sobre o sucedido nas salas de aula.

Caracterização da Turma

A Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa é a sede do Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa, caracterizado por ser um Território de Intervenção Prioritária (TEIP), cujo projeto educativo visa atenuar os problemas sociais dos territórios que as escolas servem. O agrupamento localiza-se na freguesia de Santa Maria dos Olivais, cuja população apresenta características heterogéneas a diversos níveis, existindo famílias de estratos sociais distintos. A Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa situa-se nos Olivais Sul, funciona para os 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e é constituída por sete pavilhões. A grande dimensão da Escola e as características físicas do espaço onde se situa, bastante íngreme, dificultam a comunicação e o convívio dos elementos da comunidade escolar, como realça o Projeto Educativo da Escola 2012-15.

A turma em estudo é heterogénea, constituída por 29 alunos: 11 raparigas e 18 rapazes (Figura 3.1), com idades compreendidas entre os 12 e 16 anos (Figura 3.2). A maioria tem 13 anos de idade. Uma aluna foi inscrita nesta turma, tendo a transferência ocorrida apenas no 2.º período letivo. No 3.º período letivo, outra aluna foi transferida desta turma para outra inserida no contexto de Percurso Curricular Alternativo (PCA). O que motivou esta transferência foram as características da aluna e o seu aproveitamento escolar. Outro aluno, que atingiu os 18 anos, está em risco de abandono escolar, não tendo frequentado as aulas no 3.º período letivo. Dos 29 alunos, 4 são repetentes, 1 é aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE), ao abrigo do DL 3/2008 mas sem adaptações curriculares, e 11 são alunos do Ensino Articulado da Música. A nível socioeconómico é também uma turma heterogénea, existindo 5 alunos inseridos no programa de Ação Social Escolar (ASE). É uma turma de continuidade na disciplina de Matemática, ou seja, a grande maioria fazia parte da turma 7.ª 1.ª e foram alunos da Professora Cooperante. Dos 29 alunos, 8 transitaram para o atual ano de escolaridade com nível negativo na disciplina de Matemática.

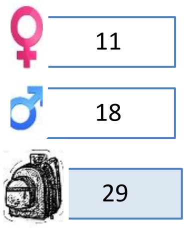


Figura 3.1 - Caraterização da turma 8.º 1.ª por género

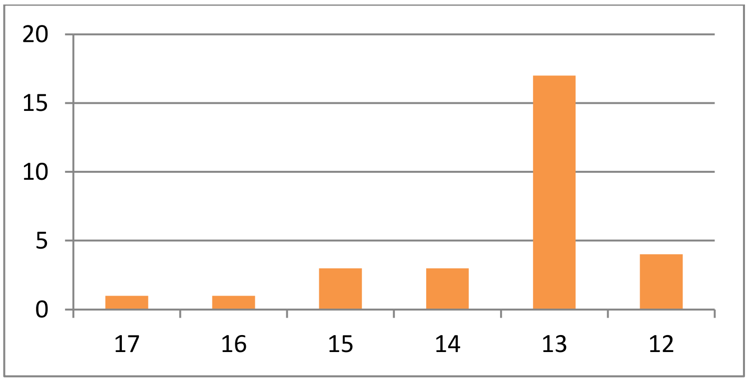


Figura 3.2 - Caraterização da turma 8.º 1.ª por idades, no início do ano letivo

No que diz respeito ao comportamento era uma turma agitada, principalmente na entrada da sala de aula, existindo alguns alunos que tinham um comportamento menos adequado em situações pontuais. No que refere ao aproveitamento, o grupo turma era empenhado e interessado. Alguns alunos revelam métodos e ritmo de trabalho adequados, tinham uma participação bastante ativa e envolviam-se nas tarefas propostas em sala de aula. Estes alunos revelaram, de uma forma geral, um bom nível de autonomia nos trabalhos desenvolvidos. Por outro lado, alguns revelaram dificuldades acentuadas e não têm autonomia no trabalho desenvolvido. Revelam falhas nos conhecimentos anteriores e não tinham confiança nos trabalhos desenvolvidos em sala de aula. Os novos elementos da turma necessitaram de um período de habituação aos métodos e ritmos de trabalho. De realçar que os que não estavam adaptados eram, principalmente, os alunos repetentes cuja postura em sala revelava falta de interesse.

O grupo turma, de modo geral, correspondeu às espectativas esperadas para o trabalho desenvolvido ao longo do 1.º período letivo apesar da grande disparidade dos valores quantitativos nos momentos de avaliação escrita e aos níveis atribuídos. Os resultados quantitativos evidenciam os polos referidos (Figura 3.3), verificando-se a maior percentagem (36 %) de alunos no nível 3, igual percentagem (25 %) de alunos no nível 2 e 4 e uma menor percentagem de alunos no nível 5. Desta análise, verifica-se que um quarto da turma se encontra com nível negativo, informação relevante para atuação nos períodos letivos que se seguem.

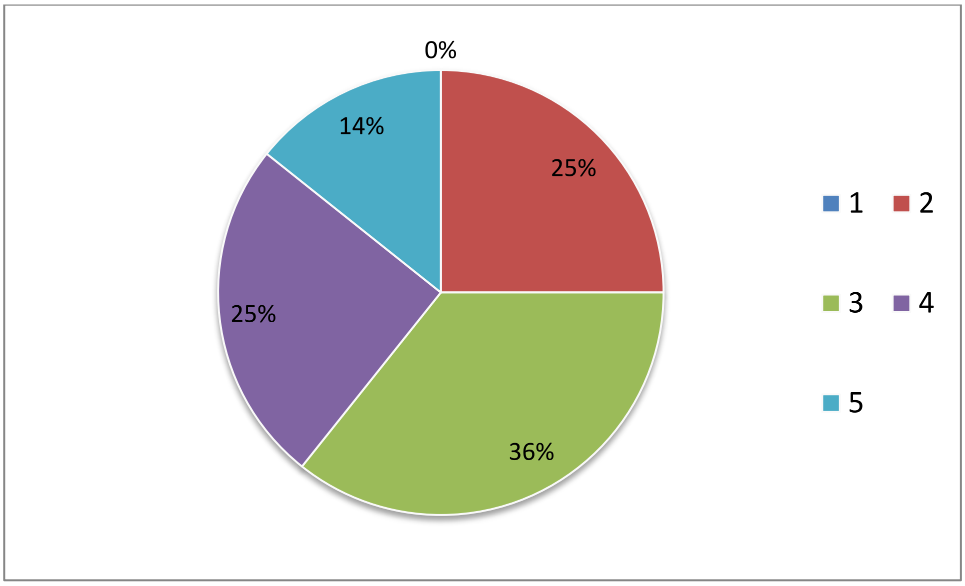


Figura 3.3 - Níveis atribuídos aos alunos do 8.º 1.ª no 1.º momento de avaliação

No decorrer do 2.º período as características da turma foram semelhantes ao anterior, contudo realça-se que alguns níveis 2 regrediram para nível 1. O ritmo de trabalho de alguns alunos continua muito aquém do desejado enquanto outros manifestam maior autonomia e maior interesse nos conteúdos trabalhados. Os alunos repetentes continuam a mostrar desinteresse pela Matemática, e demostrando vontade de vencer as suas dificuldades. Os momentos de avaliação formal foram dois e o conjunto dos elementos sobre os alunos conduziram aos níveis quantitativos que continuam a evidenciar as disparidades do período letivo anterior (Figura 3.4). Desta análise, verifica-se que 29% da turma se encontra com nível negativo, informação relevante para atuação no período letivo restante.

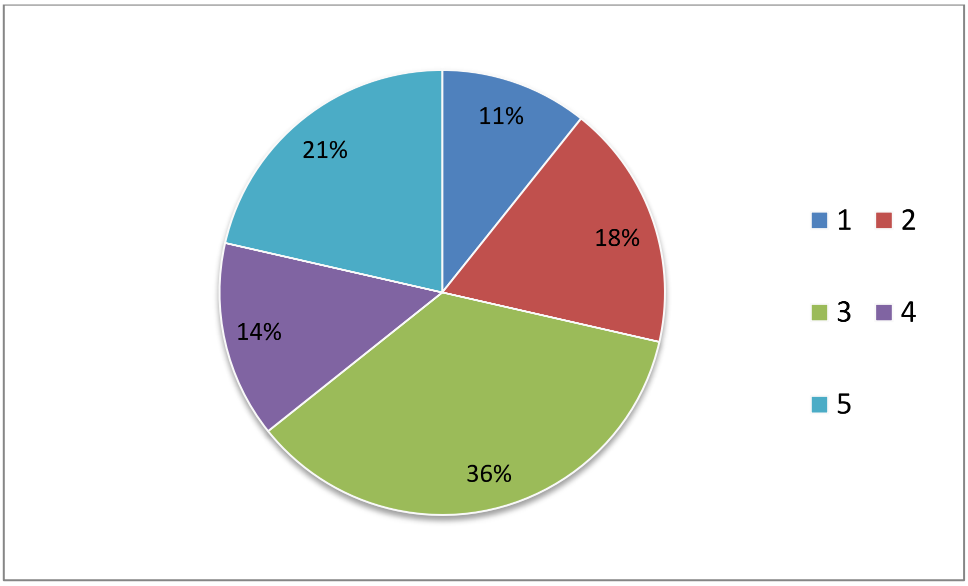


Figura 3.4 - Níveis atribuídos aos alunos do 8.º 1.ª no 2.º momento de avaliação.

No 3.º período letivo a turma manteve-se com as mesmas características, tendo ocorrido algumas mudanças de lugares. A entrada da nova aluna e a saída de outra não promoveram alterações significativas na sala de aula. A nova aluna revelou ter grandes dificuldades em vários conteúdos matemáticos mas teve uma boa integração a nível social na turma. Mostrou interesse em aprender e participou ativamente nas aulas da minha intervenção letiva, tal como a maioria dos alunos. A instabilidade provocada pelos alunos sem interesse em progredir (alguns associados ao nível 1) atrasou o ritmo dos trabalhos das aulas em geral.

Ancoragem da Unidade Didática

É no 3.º ciclo do Ensino Básico, composto por três anos de escolaridade, que se reconhece a importância da consolidação dos conhecimentos adquiridos ao longo dos ciclos anteriores mas com uma perspetiva de preparação para o Ensino Secundário. O rigor matemático tem cada vez mais importância, associando-se cada vez mais ao formalismo matemático. De acordo com o Programa de Matemática em vigor para este ciclo, é "fundamental que comecem a ser utilizados corretamente os termos (definição, propriedade, teorema, etc.) e os procedimentos demonstrativos próprios da Matemática" (ME, 2013, p.19). Este programa não disponibiliza orientações metodológicas, referindo que as mesmas devem ser escolhidas pelos professores e pelas Escolas, ajustando-se aos alunos presentes. Contudo, "visa melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem através de uma cultura de rigor e de excelência" e refere que se deve "potenciar e aprofundar a compreensão", ato que "resulta da ampliação contínua e gradual de uma complexa rede de regras, procedimentos, factos, conceitos e relações que podem ser mobilizados, de forma flexível, em diversos contextos" (ME, 2003, p. 1). No que diz respeito à Álgebra,

> introduzem-se as raízes quadradas e cúbicas, estudam-se equações do primeiro e do segundo grau, sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas, inequações do primeiro grau e abordam-se procedimentos próprios da *Álgebra* no quadro das propriedades dos monómios e polinómios. Todas estas noções são posteriormente estendidas ao corpo dos números reais. (ME, 2013, p. 19)

O Programa prevê a abordagem de alguns tópicos para esta unidade didática (Quadro 3.1) que serão considerados para a prática letiva supervisionada. Esta decorrerá no início do 3.º período, de acordo com a planificação anual elaborada pelo grupo de Matemática da qual a Professora Cooperante faz parte.

Quadro 3.1 *Tópicos da unidade didática a considerar para a intervenção letiva*

Equações Literais	- Equações Literais; - Resolução em ordem a uma dada incógnita de equações literais do 1.º e 2.º grau.
Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas	- Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas equivalentes; - Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; - Resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau pelo método de substituição. - Problemas envolvendo sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Nota. ME, 2013, pp. 23-24

Os tópicos do domínio da Álgebra surgem depois de uma abordagem, sugerida pelo programa em vigor, de potências de expoente inteiro, monómios e polinómios e equações incompletas do 2.º grau. Analisando em detalhe o normativo legal que acompanha e harmoniza o Programa (Metas Curriculares), que são dadas aos professores para que a qualidade do ensino e da aprendizagem seja alcançada, verifica-se a existência de "objetivos gerais que são especificados por descritores, redigidos de forma concisa e que apontam para desempenhos precisos e avaliáveis" (ME, 2013, p. 1). Para esta intervenção letiva foram considerados os descritores indicados para a unidade em questão (Quadro 3.2).

Quadro 3.2 *Descritores dos subdomínios considerados na intervenção letiva*

Subdomínio	Objetivo geral	Descritor
Equações Literais	Reconhecer e resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas	1. Designar por «equação literal» uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras. 2.Resolver equações literais do 1.º e do 2.º grau em ordem a uma dada incógnita considerando apenas essa incógnita como variável dos polinómios envolvidos e as restantes letras como constantes.
Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas	Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas	**1.** Designar por «sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas e» um sistema de duas equações numéricas redutíveis à forma «ax+by=c» tal que os coeficientes e não são ambos nulos e utilizar corretamente a expressão «sistema na forma canónica». **2.** Designar, fixada uma ordem para as incógnitas, o par ordenado de números como «solução de um sistema com duas incógnitas» quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por e a segunda por se obtêm duas igualdades verdadeiras e por «sistemas equivalentes» sistemas com o mesmo conjunto de soluções. **3.** Interpretar geometricamente os sistemas de duas equações de 1.º grau num plano munido de um referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»). **4.** Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau pelo método de substituição.
	Resolver problemas	1. Resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Nota. ME, 2013, pp. 23-24

A Álgebra, com a alteração ao seu conceito, passou a ser considerada o “fio condutor” (NCTM, 2008, p. 5) curricular dos vários anos de escolaridade, como tal, o pensamento algébrico vai-se desenvolvendo a vários níveis de acordo com as experiências dos alunos. No caso concreto do 8.º ano, alguns subdomínios da Álgebra foram explorados antes da unidade considerada para este trabalho. Considerando a planificação anual elaborada pela Professora Cooperante, foram abordados os conceitos relacionados com os monómios e polinómios, equações incompletas do 2.º grau e funções afins antes da exploração das equações literais e dos sistemas de equação. A exploração feita nestes subdomínios foi fundamental para a compreensão da unidade escolhida pare este trabalho (Ponte, Branco, & Matos, 2009), promovendo o desenvolvimento do sentido de variável, do pensamento relacional e realçando a importância das várias representações possíveis de serem usadas. Assim, quando os alunos iniciam a exploração dos sistemas de equações devem

> ter ficado com a noção que uma solução desta equação [equação literal] não é um número, mas sim um par ordenado de números e que esta equação admite, por norma, uma infinidade de soluções. Do estudo das funções, devem ter ficado com a noção que uma equação do tipo $y= ax + b$ representa uma relação entre duas variáveis – a variável independente (…) e variável dependente (…) – e que esta relação é representada por uma reta num gráfico cartesiano”. (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 149)

Ainda a considerar como experiências anteriores dos alunos no que refere ao domínio da Álgebra, há que considerar a exploração feita no 7.º ano de escolaridade, com a Professora Cooperante, utilizando o método das balanças para a compreensão dos princípios de equivalência. Este é um método que permite uma aprendizagem mais significativa mas que tem vantagens do ponto de vista da aplicação em alguns problemas da vida real, pois as quantidades negativas não podem ser aqui consideradas, não existem pesos negativos (Berrincha & Saraiva, 2009). Contudo, verifiquei, nos alunos que vivenciaram esta experiência uma maior perceção do sentido de símbolo, no manuseamento de expressões numéricas. Esta experiência, relatada pela Professora Cooperante, deve certamente ser considerada como proveitosa para que a manipulação da Álgebra, no que se refere ao seu carácter mais formal, seja compreendida.

O NCTM (2008) refere que os alunos que frequentam os níveis de escolaridade entre o 6.º e o 8.º “deverão apreender Álgebra, como um conjunto de conceitos e capacidades associadas à representação de relações quantitativas e, também, como um estilo de raciocínio matemático utilizado na formalização de padrões, funções e generalizações" (NCTM, 2008, p. 263). Ainda analisando as normas consideradas para a Álgebra entre o 6.º e 8.º ano, estas referem que os alunos deverão consolidar as aprendizagens por meios de experiências próprias e por meio de uma diversificação de representações, salientando a preocupação em comparar e diferenciar as vantagens das diferentes representações utilizadas. No que refere às equações literais, deverão "distinguir relações lineares das não lineares" (NCTM, 2008, p. 263). Realça o aspeto de articular, sempre que possível o domínio da Álgebra com outros domínios do currículo escolar. Salienta a importância da compreensão da demostração geométrica que pode ser usada para verificar alguns casos de expressões equivalentes.

A simbologia algébrica é, nestes anos de escolaridade, de grande importância e tem uma forte componente no currículo escolar. Contudo "a maioria dos alunos irá necessitar de bastante prática com equações lineares antes de adquirir destreza e à vontade na sua manipulação ou resolução" (NCTM, 2008, p. 267). A norma refere que, apesar das dificuldades sentidas, os alunos deverão, no final do 8.º ano, reconhecer e manipular os vários tipos de equação, as inequações, os sistemas de equações e ainda deverão saber representar geometricamente equações lineares. Estes objetivos poderão ser alcançados se a manipulação algébrica for "baseada numa prática continuada" (NCTM, 2008, p. 268).

Relativamente à compreensão das relações matemáticas, "um dos principais objetivos consiste em desenvolver a capacidade dos alunos em utilizar padrões e funções para representar, modelar e analisar uma diversidade de fenómenos e relações, em problemas matemáticos ou da vida real" (NCTM, 2008, p. 268). A importância dos modelos geométricos para representar as relações algébricas é realçada para a compreensão dos casos notáveis. Este tema foi desenvolvido antes da unidade em análise, conferindo alguma prática algébrica importante para o bom desenvolvimento do pensamento algébrico no estudo dos sistemas de equações.

Estratégias de Ensino

"O ensino efetivo da Matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente" (NCTM, 2008, p. 17). Seis normas são consideradas para o ensino da Matemática: *(i)* tarefas matemáticas significativas, *(ii)* o papel do professor no discurso;

(iii) o papel do aluno no discurso; *(iv)* o instrumento para aperfeiçoar o discurso; *(v)* análise do ensino e da aprendizagem (NCTM, 2008).

Ponte (2005) refere que a aprendizagem dos alunos resulta da atividade que estes desenvolvem na sala de aula e da reflexão que fazem sobre esta atividade. Assim, é importante que o professor desenvolva uma gestão curricular de modo a fomentar um ambiente de aprendizagem que seja desafiante e que fomente a segurança no trabalho autónomo dos seus alunos (NCTM, 2008; Ponte, 2006).

O ensino exploratório da Matemática é "uma atividade complexa" (Canavarro, 2011, p. 11) mas que traz grandes benefícios nas aprendizagens dos alunos e na gestão da sala como um todo, envolvendo os alunos nas tarefas propostas e deste modo, contribuindo para o alcance dos objetivos destas (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). Assim, a escolha da tarefa é crucial para o sucesso desejado. É igualmente importante que o professor elabore uma planificação detalhada da sua ação em sala de aula e do apoio/orientação que dará aos alunos, fomentando o trabalho autónomo e a argumentação matemática (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). Uma aula do tipo exploratória inclui quatro fases no seu desenvolvimento: *(i)* lançamento da tarefa; *(ii)* exploração e trabalho autónomo dos pares de alunos; *(iii)* discussão da tarefa em grande grupo e *(iv)* sistematização. Para promover discussões produtivas e interessantes, o papel do professor deve ser equacionado no sentido de *(i)* antecipar as dificuldades dos alunos, considerando possíveis estratégias na fase da planificação; *(ii)* monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, dando o apoio necessário para que esta autonomia seja fomentada, *(iii)* selecionar e sequenciar as estratégias dos alunos para discussão em grande grupo de acordo com critérios que considere importantes, indo ao encontro dos objetivos preconizados para cada aula e, por fim, *(iv)* estabelecer conexões, balizadas pelo propósito da aula e realizadas nas discussões em grande grupo permitindo o desenvolvimento coletivo das ideias matemáticas (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012).

Considerando a abordagem curricular exploratória, realço o ensino dialógico, preconizado por Wegerif (2010), como promotor de discussões ricas e desenvolvimento do pensamento crítico, bem como da comunicação matemática e da capacidade de argumentação das ideias matemáticas. Este tipo de estratégias promove o respeito pelas ideias dos outros e desenvolve, ainda, a capacidade de ouvir. Promove uma aprendizagem por meio de exploração dos erros, inerente à aprendizagem, pois fornece pistas para novas abordagens aos temas (Vale, Ferreira, & Santos, 2011). A perspetiva dialógica do ensino proporciona um ambiente favorável à partilha de ideias e ao debate construtivo, encorajando os alunos a pensar, por vezes, de maneira diferente (Wegerif, 2010). Esta foi uma estratégia seguida nas discussões das salas de aula, quer se tenha tratado de uma aula do tipo exploratório com a realização de uma tarefa que objetiva um propósito matemático ou numa sequência de tarefas que proporcionaram a consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Ao longo das aulas observadas da Professora Cooperante, verifiquei que esta opta por estratégias de ensino-aprendizagem que fomentam o trabalho autónomo dos alunos, que estimulam a troca de ideias entre pares de alunos e que promovem discussão a nível do grupo turma. Utiliza maioritariamente um tipo de ensino com abordagem exploratória, permitindo aos alunos a exploração dos temas por experiências próprias, evitando "os efeitos negativos de começar pela introdução de informação conduzida pelo professor" (Ponte, 2005, p. 23). Pretendi, na planificação que realizei, manter o mesmo tipo de abordagem, justificando a minha escolha com base nas investigações realizadas sobre as estratégias de ensino que potenciam as aprendizagens dos alunos. Tendo em conta as características do pensamento algébrico (ver Capítulo 2) e os objetivos deste estudo, pretendi seguir, maioritariamente, uma abordagem exploratória numa perspetiva de ensino dialógico. Contudo, a natureza das tarefas foi diversificada, havendo maior atenção na resolução de problemas.

Proposta Pedagógica

O desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser feito de modo continuado para que seja promovida a compreensão das várias vertentes consideradas (Canavarro, 2007; NCTM, 2008). Abrantes, Serrazina, e Oliveira (1999) preconizam que "atividades de tipo exploratório e investigativo, que apelem à descoberta e comunicação de generalizações, podem desempenhar um papel central no desenvolvimento de capacidades ligadas ao pensamento algébrico" (p. 119). A sequência de tarefas é de extrema importância para que a aprendizagem dos alunos seja equilibrada e otimizada. O papel do professor é igualmente importante e deve "ajudar os alunos a dar visibilidade às estruturas matemáticas subjacentes à situação em estudo", por meio de representações favoráveis à generalização (Canavarro, 2007, p.110). A planificação da unidade a lecionar no início do 3.º período letivo à turma 8.º 1.ª é apresentada em seguida de forma sumária (Quadro 3.3).

Quadro 3.3 *Planificação da subunidade didática "Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas" com base nos descritores do Programa em vigor*

Subdomínio: Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas		
Aula / Duração	Tarefas / Conteúdo	Objetivos gerais
Aula 1 27 / 04 / 2016 90 min.	Tarefa Exploratória: "Compreendo Equações Literais"	- Definir equação literal. - Identificar a solução de uma equação literal. - Formalizar a escrita de sistemas de duas equações.
Aula 2 29 / 04 / 2016 90 min.	Tarefas Exploratórias: "Planear Escadas com a Matemática" "Prova de Atletismo"	- Escrever a solução de um sistema de equações como um par ordenado (x, y). - Interpretar a representação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.
Aula 3 02 / 05 / 2016 45 min. Entrevistas	Tarefa de consolidação: "Aplico o que Aprendi - 1"	- Consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores.
Aula 4 04 / 05 / 2016 90 min. Calculadora gráfica	Tarefa Exploratória: "Interpreto geometricamente os sistemas de equações"	- Interpretar geometricamente sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. - Classificar sistemas de equações em função do número de soluções que admite.
Aula 5 06 / 05 / 2016 90 min. Calculadora gráfica	Tarefa Exploratória: "Resolvo sistemas de equações algebricamente"	- Reconhecer as desvantagens do método gráfico para o método algébrico de resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. -Manipular algebricamente, com significado, as equações do sistema para obter as soluções.
Aula 6 09 / 05 / 2016 45 min. Entrevistas	Tarefa de consolidação: "Aplico o que Aprendi - 2"	- Consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores. - Resolução de problemas.
Aula 7 11 / 05 / 2016 90 min. Calculadora gráfica	Tarefa de consolidação: "Aplico o que Aprendi - 3	- Consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores. - Resolução de problemas.

A sequência de tarefas elaborada foi prevista de modo a aplicar as estratégias de ensino referidas e principalmente de modo a que o aluno seja o principal ator no processo de ensino-aprendizagem. A grande preocupação foi manter cada aluno envolvido na atividade matemática de modo a sentir as suas próprias dificuldades e a tentar vencê-las com os pares formados, fomentando a partilha de ideias e a interajuda entre os alunos.

Assim, as tarefas foram estruturadas de modo a trabalhar os conteúdos trabalhados na aula anterior, fazendo com que uma pequena cadeia fosse formada e as conexões matemáticas estabelecidas entre aulas. O estabelecimento destas conexões permite minimizar as alterações às planificações das aulas consequentes, caso houvesse atrasos nas antecedentes. Cada aula foi orientada para que um ou mais objetivos específicos fossem alcançados, totalizando assim os objetivos específicos da unidade didática.

A proposta pedagógica elaborada tentou promover um equilíbrio entre as abordagens analíticas e gráficas, como se verifica pela introdução da calculadora gráfica. Por um lado, incentivei a utilização deste recurso como estratégia facilitadora e motivadora mas, por outro lado, a ausência de imposição do seu uso, permite que os alunos escolham as estratégias que preferem, possibilitando o surgimento de diferentes abordagens. Pretendi com isto valorizar a compreensão do significado matemático dos conceitos envolvidos e a procura de integração de diferentes representações. Não procurei, contudo, fazer uma exploração deste recurso com as suas diferentes potencialidades mas antes realçar a possibilidade de conciliação entre diferentes representações como ganho efetivo na aprendizagem dos alunos.

A Sequência de Tarefas

Em cada aula foi proposta uma ficha de trabalho com uma ou mais tarefas, atendendo à sua diversificação, de modo a proporcionar uma atividade variada e possibilitar uma aprendizagem significativa. Foram distribuídos os enunciados com espaço próprio para a resposta de modo a facilitar a recolha dos dados. Por cada par de aluno foi distribuído apenas 1 enunciado de modo a proporcionar a discussão e a partilha de ideias. Para as aulas de 90 minutos foram planeadas tarefas de carácter exploratório de modo a atingir os objetivos específicos de cada aula e ainda a permitir consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores ou em unidades e anos antecedentes. Para as aulas de 45 minutos, foram planeadas tarefas denominadas “Aplico o que aprendi” com exercícios e problemas de consolidação. Estas aulas foram apenas de trabalho autónomo dos alunos sem existir discussão prevendo uma entrevista aos pares selecionados para o estudo. A última aula de 90 minutos decorreu nos mesmos moldes do que as de 45 minutos, mas as entrevistas decorreram durante a aula, no apoio prestado aos alunos. Em seguida é feita uma breve descrição da ficha de trabalho distribuída por cada aula, com os recursos utilizados.

Aula 1 – Tarefa "Compreendo Equações Literais"

A ficha de trabalho (Anexo I), com carácter exploratório, foi adaptada de Nobre, Amado, & Ponte (2015) e o objetivo principal seria promover a compreensão da definição de uma equação literal de forma intuitiva e com significado. Para isso, era proposto que resolvessem um enigma cuja informação seria dada, maioritariamente, por meio de representação pictórica. Na primeira parte da tarefa seria facultada apenas uma condição, motivando os alunos a uma exploração algébrica da informação indagando-os se seria suficiente para alcançar a resposta pretendida. A proposta de atribuição de valores a uma das incógnitas proporciona mais do que uma solução, e sempre com um valor para as duas incógnitas, ou seja, fazendo-os compreender que uma equação literal admite mais do que uma solução e que estas são do tipo (x, y), ou seja, um par ordenado. No final da primeira parte da tarefa exploratória foi solicitado que escrevessem a mesma equação algébrica em função da outra incógnita. Pretendia que verificassem que na resolução algébrica uma das incógnitas funciona como uma constante.

Na segunda parte da tarefa seria facultada outra condição para se juntar à primeira (aparecem as duas condições juntas para facilitar a exploração e evitar erros desnecessários), repetindo-se a exploração no sentido de encontrarem a solução e se seria possível encontrá-la. Não pretendia uma resolução algébrica, antes que usassem as representações que achassem mais adequadas, tais como esquemas, tabelas ou mesmo cálculos algébricos. O objetivo desta parte da tarefa era a compreensão clara de que com duas variáveis e com duas condições que as relacionam o problema ficaria resolvido. Por comparação com as duas soluções, compreendem que, neste caso, a solução era um único par ordenado (x, y).

Na fase da discussão e da formalização pretendia levá-los à definição de equação literal, quais os tipos de soluções que admitem e ainda permitir a escrita formal de um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas, compreendendo que resulta da conjunção de duas condições que relacionam as mesmas incógnitas.

Aula 2 – Tarefas “Planear escadas com a Matemática” e “Prova de atletismo”

A primeira tarefa (Anexo II) desta aula, “Planear escadas com a Matemática”, adaptada de Projeto 1001 Itens (2011) e o principal objetivo seria a consolidação do conceito de equação literal e respetivas soluções. Nesta tarefa, dadas duas condições, num contexto de um problema de construção de escadas, seria pedido que relacionassem as duas incógnitas: o comprimento do espelho e o comprimento do cobertor. O enunciado utiliza maioritariamente a linguagem natural mas um esquema com definições das incógnitas foi apresentado para facilitar a compreensão. As questões elaboradas, pretendiam levar à compreensão de que a solução de uma equação literal pode não ser solução da outra equação considerada para o mesmo problema mas que a solução do sistema de equações é solução das duas condições dadas e, por fim, que esta se escreve na forma de um par ordenado (x, y).

A segunda tarefa (Anexo II), “Prova de atletismo”, adaptada Ponte, Branco, & Matos (2009), descreve verbalmente a situação de uma prova de atletismo entre dois amigos e apresenta um referencial cartesiano com duas semirretas que traduz parte da informação relatada. Numa primeira fase, era solicitado que comentassem a afirmação de um dos amigos por meio da interpretação dos dados fornecidos em ambas as representações. Pretendia que (i) aplicassem os conhecimentos sobre gráfico de uma função ($y = ax + b$) e que (ii) desenvolvessem a comunicação e o raciocínio matemáticos. As restantes questões levariam a uma interpretação do gráfico e à perceção de que nem sempre uma representação gráfica fornece o rigor pretendido. Seria necessário uma verificação algébrica da leitura feita, usando-se as expressões algébricas das funções, cujos gráficos seriam as retas representadas. Por fim, os alunos seriam orientados à interpretação da representação geométrica, no sentido de perceberem que o ponto de interseção das duas retas é a solução do sistema de duas equações com duas incógnitas.

Nas fases das discussões e da formalização pretendia levá-los à escrita formal de uma solução de um sistema de equações literais e à interpretação que esta corresponderia ao ponto de interseção das representações gráficas de cada uma das condições.

Aula 3 – Ficha “Aplico o que aprendi – 1”

As tarefas realizadas (Anexo III) nesta aula serão de consolidação, pretendendo consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores. A primeira tarefa desta aula, “O muro da D. Rosa", adaptada Marques e Ferreira (2014), objetiva interpretar o significado de cada uma das incógnitas utilizadas. Neste caso, o contexto seria real, descrito em linguagem natural e acompanhado de duas figuras esquemáticas. A primeira identifica duas das dimensões do tijolo utilizado na construção do muro e a segunda pretende mostrar como são colocados os tijolos de modo a ser construído o muro. Com esta tarefa pretende-se analisar os significados atribuídos às incógnitas que estão definidas de forma implícita.

A segunda tarefa desta aula, "Figuras Geométricas", adaptada de Marques e Ferreira (2014), pretende transmitir o máximo de informação por meio de imagens. Este problema tem associado um contexto geométrico e pretendo analisar o modo como a informação será gerida e traduzida para a linguagem matemática no contexto da unidade lecionada. É necessário mobilizar conhecimentos de anos anteriores e das aulas anteriores já inseridas na unidade considerada para este estudo: cálculo de perímetro de figuras geométricas, conceito de triângulo isósceles e escrita de uma equação literal na forma canónica. É pedido que indiquem duas soluções para uma das equações literais e que verifiquem, posteriormente se alguma delas é também solução da segunda equação literal considerada. É solicitado que escrevam formalmente o sistema de duas equações do 1.º grau encontradas nas alíneas anteriores e que indiquem uma forma de encontrarem a solução.

Aula 4 – Tarefa "Interpretação geométrica de sistemas de equações"

Esta tarefa (Anexo IV), organizada em várias questões adaptadas de Marques & Ferreira (2014) e de Ponte, Branco, & Matos (2009), pretende orientar os alunos a classificar os sistemas de acordo com o número de soluções do conjunto solução. A classificação que faziam às equações com uma incógnita servirá de ancoragem à nova atividade matemática. A calculadora gráfica será um recurso importante para o sucesso desta tarefa no sentido de obterem graficamente, e com rigor, a solução do sistema dado. Contudo, será solicitado que façam a verificação algébrica da solução encontrada, por substituição dos valores obtidos. Será reforçada a ideia de que a solução de um sistema de equações é um par ordenado e que é, no caso utilizado, o único ponto de interseção das duas retas consideradas. Numa segunda fase, será pedido que utilizem a calculadora gráfica para a representação gráfica de três novos sistemas de duas equações. Será esperado que descrevam as situações que encontrem indicando as várias soluções e salientando os ásperos comuns e não comuns das três situações. Espera-se que encontrem três situações:

duas retas concorrentes oblíquas, duas retas estritamente paralelas e duas retas paralelas coincidentes. Na última tarefa serão facultadas representações gráficas de 5 retas e, revendo conhecimento trabalhados anteriormente, pretende-se que estabeleçam a correspondência entre cada representação gráfica e a respetiva expressão algébrica que será facultada e na criação de sistemas de equações em função da classificação pretendida.

Aula 5 – Tarefa "Resolvo sistemas algebricamente"

Esta tarefa (Anexo V), adaptada de Marques e Ferreira (2014), é a última que pretende ter o carácter de exploratória. Pretende-se orientar os alunos na compreensão dos manuseamentos algébricos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Pretende-se, ainda, orientar os alunos para a compreensão das desvantagens da resolução gráfica de sistemas para a resolução algébrica; promovendo a capacidade crítica de identificarem as situações em que o método gráfico não é vantajoso. Para isto, é dado um sistema de equações e pede-se que seja encontrada a solução do mesmo por meio da utilização da calculadora gráfica e a verificação de um par ordenado como solução. Objetiva-se a comparação de um valor aproximado dado pela calculadora gráfica, pelo facto de serem dízimas infinitas, e a solução exata, representada por meio de frações. Pretende-se levá-los a concluir que, nestas circunstâncias, a calculadora gráfica não é a estratégia mais correta. Desta forma, realçando a vantagem do método algébrico, passa-se à aprendizagem do método de substituição por um problema que poderão resolver pela estratégia que acharem adequada. A ideia é promover, de forma intuitiva e com significado, as substituições dos pesos de vários conjuntos de bolas, semelhante à tarefa da primeira aula. Pretende-se analisar como conseguem organizar os cálculos sem terem acesso à formalidade algébrica do método de substituição. Este aspeto será introduzido e trabalhado na fase da discussão coletiva. No final desta exploração, é solicitado que apliquem o método de substituição na resolução de três novos sistemas de equações, parte final da tarefa.

Aula 6 – Ficha "Aplico o que aprendi – 2"

As tarefas (Anexo VI) realizadas nesta aula, retiradas de Boavida et al. (2008) e de Marques e Ferreira (2014), pretendem consolidar os tópicos trabalhados nas aulas anteriores. A primeira, "Os iogurtes do acampamento", tem como objetivos específicos a tradução da informação de um contexto próximo à realidade, transmitida em linguagem natural para um contexto de simbologia algébrica, objetivando-se uma resolução por procedimentos algébricos. É necessário a identificação da simbologia e a atribuição de significado às incógnitas que devem ser definidas pelos alunos. A segunda tarefa, "O triângulo isósceles", pretende igualmente a tradução do enunciado do problema mas desta vez em contexto geométrico. Os dado do problema utilizam representação verbal e pictórica, uma figura com representação dos lados de igual comprimento e medidas dos ângulos expressas por meio de duas expressões com duas incógnitas, a e b. Na primeira tarefa, as incógnitas não estão definidas. A calculadora gráfica não é um recurso disponibilizado nesta aula.

Aula 7 – Ficha "Aplico o que aprendi – 3"

Esta ficha (Anexo VII) pretende consolidar os conhecimentos trabalhados nesta unidade bem como as relações com conhecimentos anteriores. Neste sentido, a sequência de tarefas foi estruturada no sentido de permitir aos alunos uma atividade diversificada. As tarefas foram adaptadas de manuais escolares tendo em vista os objetivos que se pretendem alcançar, para a aprendizagem dos alunos e para a recolha de dados necessária ao estudo de cariz investigativo a que me proponho. Apresento em seguida, e de forma resumida, o objetivo de cada uma das tarefas:

<u>Tarefa 1:</u> Exercício com contexto matemático. Pretende identificar se um par ordenado é ou não solução de um sistema, por substituição ou por resolução do sistema.

<u>Tarefa 2:</u> Problema com contextualização próximo à realidade apresentada em linguagem natural. Tem por objetivos: *(i)* Traduzir as condições do problema dadas em linguagem natural e escrever o sistema de duas equações; *(ii)* Resolver o sistema de equações usando o método de substituição e *(iii)* Analisar a resposta obtida no contexto da situação real descrita ao promover a escrita da resposta.

<u>Tarefa 3</u>: Tarefa sem contextualização. Tem por objetivo encontrar o conjunto solução dos sistemas pelo método gráfico ou algébrico. O propósito desta tarefa é a análise do método que é preferencialmente escolhido pelos alunos, o algébrico ou o gráfico, e a analisar o manuseamento algébrico.

Tarefa 4: Problema com contextualização próximo ao real, apresentada em linguagem natural. São objetivos desta tarefa: *(i)* Traduzir as condições do problema dadas em linguagem natural e construir o sistema de duas equações; *(ii)* Resolver o sistema de equações usando o método de substituição; *(iii)* Analisar a resposta obtida no contexto da situação real descrita. Note-se que o problema desta tarefa admite uma solução matemática, não adequada ao contexto da situação real. Pretende-se estimular o espírito crítico dos alunos com a verificação da adequabilidade da solução ao contexto.

Tarefa 5: Problema com contexto matemático com letras que simbolizam constantes e incógnitas. É objetivo desta tarefa descobrir o valor das constantes dado o par ordenado que é solução do sistema. O propósito principal desta tarefa é analisar o significado que os alunos atribuem aos símbolos algébricos.

Desafio Final – " As quatro irmãs"

O desafio final (Anexo VIII) é uma tarefa que pretende, como o nome indica, desafiar os conhecimentos dos alunos e averiguar se são capazes de perceber que nesta situação têm 4 incógnitas e 4 equações. Objetiva-se uma resolução que utilize a formalidade algébrica mas todas as estratégias serão consideradas válidas e analisadas. Pretende-se que definam as incógnitas, construam o sistema de quatro equações e que o resolvam algebricamente. O problema insere-se num contexto próximo ao quotidiano e foi retirado de Marques e Ferreira (2014).

Recursos

Os recursos utilizados para a lecionação desta unidade didática foram as tarefas propostas por mim e entregues em impresso próprio, o quadro, o computador e o projetor existentes nas salas. Como recursos tecnológicos que potenciem as aprendizagens considera-se o Geogebra, *software* de geometria dinâmica, e a calculadora gráfica. O Geogebra acabou por ser utilizado apenas para mostrar representações gráficas nos momentos de síntese mas não de modo interativo em sala de aula. Não havendo sala com um computador para cada aluno, a realização das representações gráficas dos sistemas de equações foi pensada para a utilização da calculadora gráfica. Os alunos tiveram duas aulas, que ocorreram antes da minha intervenção letiva, no sentido de se familiarizarem com o recurso tecnológico. A sua utilização foi equacionada para proporcionar uma estratégia de resolução gráfica, que não a elaboração dos gráficos com papel e lápis. Esta última pareceu-me não ser uma estratégia adequada por ser demorada e não conferir rigor na sua realização. Com a possibilidade da utilização deste recurso, poderei analisar qual o método mais utilizado pelos alunos para a resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Avaliação

A avaliação é uma ferramenta que permite ao professor analisar a evolução dos seus alunos, diagnosticando insuficiências nas suas aprendizagens bem como no trabalho desenvolvido. A avaliação e a gestão curricular devem estar em harmonia e articuladas, pois a reflexão do professor e as observações realizadas em sala de aula bem como as produções escritas dos alunos possibilitam reformulações nas planificações, o que, por sua vez, potencia o ensino-aprendizagem (Dias & Santos, 2009). Desta forma, a avaliação não deverá ser feita aos alunos mas para os alunos, devendo ser uma atividade rotineira na sala de aula, e não esporádica, bem como diversificada. As diversas fontes de informação fornecem ao professor informações mais precisas (NCTM, 2008).

Nesta proposta de lecionação a avaliação tem uma componente formativa, através da recolha, análise e devolução de produções realizadas pelos alunos nas aulas, bem como do questionamento intencional durante a aula e do *feedback* escrito realizado nas produções escritas recolhidas.

Aquando da realização das planificações das aulas, apenas planeei dar *feedback* escrito às tarefas que não foram discutidas em aula, pois seria outra forma de avaliar as aprendizagens e de "dialogar" com os alunos. Contudo, não me senti confortável em recolher as outras tarefas e entregá-las sem nenhum *feedback*. Desta forma, apenas a primeira tarefa foi entregue sem nenhum comentário escrito. A realização desta tarefa, durante a minha intervenção letiva, permitiu-me não só avaliar as aprendizagens dos alunos mas ter acesso aos significados que os mesmos iam atribuindo aos conceitos matemáticos trabalhados. Esta ação permitiu-me intervir, nas aulas consequentes, de forma a corrigir erros frequentes e alertar para situações erróneas que estariam a surgir. Tarefa realizada em simultâneo durante o período de trabalho autónomo dos pares de alunos e durante as discussões. Sempre que achei pertinente, e quando o momento de síntese passou para o início das aulas consequentes, iniciei a aula com uma pequena síntese em que chamava à atenção para situações que mereciam realce, não só do ponto de vista do erro mas de alguma estratégia que merecia ser realçada. Esta ação foi maximizada pela ação do *feedback* escrito feito às tarefas. Por outro lado, a realização deste trabalho, permitiu-me, por meio de questionamento, estar mais perto dos pares de alunos; utilizando mensagens personalizadas e direcionadas para cada par de alunos. Verifiquei, por observação das aulas consequentes, que os *feedbacks* eram considerados, pois ouvi várias vezes as frases "como na outra tarefa?".

Outra ferramenta importante para a avaliação do desempenho dos alunos foram as grelhas de observação (Anexo IX), preenchidas pela minha colega de mestrado. Em complemento a esta informação, foram consideradas as descrições sucintas de cada uma das aulas lecionadas com indicação dos desempenhos de cada aluno. As grelhas de observação foram importantes para a realização destas notas de campo.

As aulas lecionadas

Após a elaboração das tarefas, as planificações foram elaboradas com detalhe possível de modo a minimizar as situações de perda de controlo da aula em curso. Assim, nas tarefas exploratórias foram equacionados os momentos da aula, prevendo os momentos de apresentação das tarefas, de trabalho autónomo, de discussão em grande grupo, de síntese e formalização de novos conceitos. Para cada aula foram explicitados os objetivos gerais e os tempos para cada um dos momentos considerados. Em relação ao desenvolvimento da aula, as planificações consideram os objetivos específicos de cada questão colocada; as respostas esperadas, considerando o maior números de estratégias; as dificuldades dos alunos; a minha ação (do professor) e como ultrapassar, por meio de questionamento, as dificuldades que surgirem.

A imprevisibilidade das aulas é um fator que devemos considerar na elaboração das panificações. Assim, foi minha preocupação que cada tarefa iniciasse com uma pequena revisão prática da aula anterior. Esta situação previa a exploração do conceito na aula consequente, caso não tivesse sido trabalhado na anterior, ou a consolidação do conceito, caso tivesse sido trabalhado na aula antecedente. Foram feitos pequenos ajustes às planificações devido à falta de cumprimento da planificação da aula antecedente. No sentido de se compreender como ocorreram as aulas da intervenção letiva, faço em seguida uma breve descrição das mesmas. Realço aspetos tais como a importância da planificação na condução da aula, nas alterações realizadas às planificações, e as alterações que faria em caso de nova aplicação das tarefas planeadas.

Aula 1 – Dia 27 de abril de 2016

A primeira aula desta intervenção letiva começou de forma mais agitada do que é habitual devido à mudança dos lugares que foram feitas no sentido de agrupar os alunos selecionados para o estudo, em função das autorizações dos Encarregados de Educação. Contudo, esta agitação não foi impeditiva de uma aula de sucesso com aprendizagens significativas e com discussões interessantes.

Numa primeira fase, informei os alunos que as próximas aulas iriam ser orientadas por mim e que faríamos as tarefas em registo próprio pois, em simultâneo, iria desenvolver um trabalho de pesquisa sobre os raciocínios matemáticos. Assim, solicitei que não efetuassem a correção das tarefas nas mesmas durante o momento de discussão coletiva. O sumário da aula foi ditado e passei à fase em que distribui o enunciado da primeira parte da tarefa, na qual pretendia que verificassem que uma equação literal não tem uma solução única pois tem duas incógnitas (as que são trabalhadas neste nível etário) e que são do tipo (x, y). Referi o intervalo de tempo que dispunham para executar a tarefa, que discutissem a pares e que solicitassem a minha ajuda caso fosse necessário algum esclarecimento. Os pares formados funcionaram, de um modo geral. Apenas a realçar que um dos pares de alunos, escolhidos para o estudo de cariz investigativo, não funcionou muito bem numa primeira fase. A reação dos alunos ao trabalho conjunto não foi a melhor mas era uma situação que eu estaria à espera. A situação foi perfeitamente ultrapassada com um comentário meu no sentido positivo do trabalho de ambos e que seriam apenas nestas aulas. O trabalho que efetuei com os alunos ao longo do ano letivo possibilitou-me este contacto mais próximo com os alunos e a minha solicitação foi aceite e, tal como previa, o par de alunos funcionou muito bem nesta aula e nas consequentes.

A principal dificuldade que senti no trabalho dos alunos, nesta primeira fase da tarefa foi o facto de não conseguirem dar resposta à questão inicial. Os alunos pretendiam dar uma resposta ao enigma mas não estavam a conseguir. Solicitei que relessem o enunciado e a questão que era feita. Assim que o fizeram, perceberam que era questionado se era ou não possível dar resposta ao problema. A resposta foi imediatamente negativa e solicitei que escrevem a justificação dessa negação. A restante parte da tarefa ocorreu sem grandes dificuldades e foi terminada 5 minutos após o previsto na planificação. Verifiquei que todos os alunos estavam envolvidos na realização da tarefa, inclusive os alunos que habitualmente não estão interessados nas aulas. Passando ao momento da discussão, esta decorreu conforme o previsto. Relativamente à planificação, não chamei à atenção para o uso de outras letras para as incógnitas que não o *x* e o *y*. Contudo no final da primeira parte desta tarefa, explorei o significado das incógnitas pois o alunos que foi ao quadro resolver esta tarefa, optou por trocar os significados iniciais das incógnitas. Assim, registei no quadro a solução da resolução da equação em ordem ao preço do crocodilo com as incógnitas iniciais (Figura 3.5). Desta firma, os alunos tiveram a noção de que o aspeto simbólico das equações tem sempre a ver com o significado que atribuímos às mesmas.

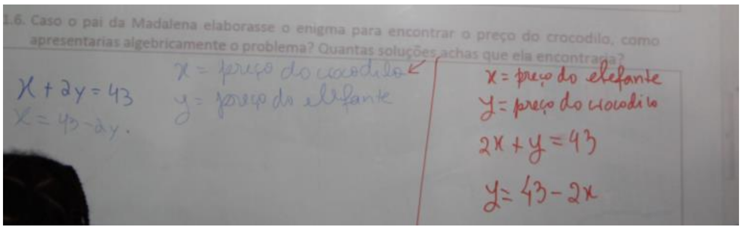


Figura 3.5 - Significado que os alunos atribuíram às incógnitas

A formalização do conceito de equação literal ocorreu com a projeção da seguinte definição: *Equação literal é uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras* (ME, 2013). Esta definição, retirada do manual escolar, foi muito formal para os alunos, apesar de utilizar dois exemplos concretos, $x+5y=30$ e $3a+4b=50$, e discutir sucintamente a simbologia existente. Conforme a reflexão conjunta pós-aula, conclui que deveria ter usado a equação literal da 1.ª parte da tarefa "Compreendo equações literais" de modo a proporcionar uma aprendizagem com base na vivência daquela aula. A formalização não ficou completa pois não foi realçada a forma de resolução de uma equação literal. Esta parte da formalização transitou para a aula seguinte.

A distribuição da segunda parte da tarefa ocorreu sensivelmente dentro do tempo estipulado na planificação e decorreu de forma tranquila. A dificuldade maior que senti foi na atribuição da reposta ao enigma dando as duas condições. Numa primeira fase, os alunos eram levados a responder que continuavam sem saber o preço do crocodilo, por isso ainda não conseguiam responder ao enigma. Solicitei que reparassem nas imagens das duas condições e que analisassem quantas vezes a situação da primeira condição se repetia na segunda.

A síntese sobre a escrita formal de um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas foi promovida por representação verbal como *a conjugação de duas* *equações literais com as mesmas incógnitas* (Marques & Ferreira, 2014). Acrescentei que se *utiliza o símbolo "$\wedge$" para representar a conjunção ou o símbolo "{"*. O exemplo que escolhi para ilustrar a definição verbal recorreu à representação algébrica, como seria de esperar, contudo utilizei uma definição com elevado grau de abstração e não foi intuitiva para a maioria dos alunos: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ *com **x** e **y** incógnitas e **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** constantes reais e **a**, **b**, **d**, e **e** reais não nulos* (ME, 2013). Deveria ter promovido a formalização algébrica concretizada para o exemplo trabalhado e não com utilização de mais letras para indicação dos coeficientes. Creio que, desta forma, apenas alguns alunos chegaram à compreensão pretendida. A planificação desta aula e o documento projetado utilizado fazem parte integrante deste relatório (Anexo X).

Aula 2 – Dia 29 de abril de 2016

Esta é uma aula que ocorre à 6.ª feira e ao primeiro bloco da manhã. Ao longo do ano letivo tem-se verificado um aumento do número de alunos que chegam atrasados. O mesmo aconteceu neste dia. Contudo a aula iniciou com o sumário escrito no quadro, para que os que fossem chegando pudessem ter a oportunidade de o copiar. Optei por fazer uma pequena revisão da última aula pois foram introduzidos novos conceitos e, assim, consegui completar a formalização que não foi feita na última aula. Esta revisão foi conseguida por reformulação do PPT elaborado referindo que (*i*) *uma equação literal resolve-se em ordem a um das incógnitas, considerando-a a variável do polinómio;* (*ii*) a*s restantes letras são consideradas como constantes;* (*iii*) *os princípios de equivalência são usados para a resolução de uma qualquer equação literal* e, ainda, (*iv*) que *existem várias soluções para cada equação literal.* A formalização terminou com a referência à forma canónica, com a utilização de um sistema escrito na forma canónica, $\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x - y = 25 \end{cases}$, e um que não está na forma canónica, $\begin{cases} 10x = 700 - 5y \\ x = y + 25 \end{cases}$. Enquanto os alunos faziam o registo sobre a forma canónica no caderno diário, fui distribuindo a nova tarefa e expliquei que a aula decorreria nos moldes da aula anterior.

O trabalho autónomo iniciou de forma lenta e algumas dificuldades foram realçadas na interpretação do enunciado da tarefa "Planeando escadas com a Matemática". O trabalhou decorreu com alguma lentidão e, na fase da discussão, fui chamando alguns alunos ao quadro. Senti dificuldades em reter quais as estratégias mais interessantes pelo que optei por deixar ir ao quadro os alunos que relevaram interesse em participar na aula. No sentido de averiguar outras estratégias, questionei-os sobre outros métodos de resolução e surgiu a escrita formal do sistema. Solicitei ao aluno a escrita do sistema e, em simultâneo com outro aluno, escrevi no quadro a resolução com escrita organizada em forma de sistema. Os restantes alunos não compreenderam bem esta metodologia e resolvi fazer o paralelo com a resolução do outro aluno no quadro, que tinha uma substituição de valores para cada uma das condições em separado. A comparação estabelecida foi clarificadora para alguns alunos. Reconheço que talvez tenha sido um passo de grande dimensão para uma discussão geral, por envolver o ainda não referido método de substituição. Terminada esta discussão, e esclarecidas as dúvidas que surgiram, passei à distribuição do enunciado da segunda tarefa desta aula, “Prova de atletismo”.

O arranque do trabalho autónomo foi novamente lento e optei por ler o enunciado em voz bastante alta de modo a que os alunos se acalmassem e voltassem a ter a concentração necessária. O aspeto da incerteza dada na leitura de um gráfico como o da tarefa foi realçado e foi solicitada uma estratégia que permitisse ter a certeza da resposta. A resolução gráfica elaborada no quadro, com a projeção do gráfico no quadro, foi esclarecedora sobre como chegar a uma resposta aproximada. Foi sendo sempre realçada a resolução algébrica para ser confirmada a resposta. A interpretação do significado do ponto de interseção não representou dificuldades pois o contexto é familiar aos alunos. A maioria dos alunos identificou as coordenadas desse ponto por meio de observação gráfica. Foi, ainda, necessário questioná-los quanto ao rigor obtido por método algébrico. A discussão feita em torno desta questão ocorreu com duas estratégias a serem discutidas em paralelo, uma oralmente e outra a ser escrita no quadro. Estabelecendo a comparação entre os dois métodos, verifiquei que o aluno que estava no quadro apenas utilizou uma das equações enquanto a colega tinha igualado as duas condições. Questionei o primeiro aluno se poderia ter a certeza que esta solução também se enquadrava no desempenho da Rita e como poderia ter essa certeza. O aluno respondeu e fez a verificação do mesmo par ordenado na equação referente ao desempenho da Rita. A discussão terminou com uma forte chamada de atenção à solução do sistema, escrito algebricamente, ser o ponto de interseção das retas consideradas. Referi que *um par ordenado* (x_0, y_0) *é solução de um sistema quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por* x_0 *e a segunda por* y_0*, se obtêm duas igualdades verdadeiras* (ME, 2013). No final, realcei o facto de, nesta tarefa, não terem sido consideradas retas mas segmentos de reta, devido ao contexto do problema no contexto da vida real.

Relativamente à planificação (Anexo XI), o momento de síntese não ocorreu com a utilização do PPT elaborado pois o tempo não o permitia. Tomei a decisão de fazer a síntese pretendida com o exercício em questão mas sem qualquer escrita da mesma nos cadernos diários. Isto porque seria um tema a abordar na aula exploratória seguinte, por isso o conceito iria ser mais trabalhado.

Aula 3 – Dia 02 de maio de 2016

Esta aula tem 45 minutos de duração e para ela foi pensada uma ficha de trabalho com duas tarefas distintas. Não foi feita discussão com o grupo turma porque os pares selecionados para o estudo de cariz investigativo iriam ser entrevistados em seguida.

A primeira tarefa, "O muro da D. Rosa", tinha uma figura com as dimensões do tijolo que foi facilmente compreendida. A outra figura, com o esboço da construção do muro, levou a que alguns dos alunos interpretassem que o muro tinha apenas dois tijolos. Os alunos que relevaram esta dificuldade apenas equacionaram o muro com mais tijolos na 2.ª questão quando se atribuiu o número de 18 tijolos "deitados" (d=18). Estes alunos atribuíram significados diferentes às incógnitas quando comparamos a 1.ª questão com a 2.ª. Um dos alunos questionou pela largura do tijolo e um par de alunos não compreendeu a "construção aleatória" do muro. Assim que se atribuiu o valor de d=18 tijolos "deitados", a tarefa deixou de apresentar dificuldades.

A segunda tarefa, com contexto geométrico, tinha as incógnitas explicitadas na imagem, nas medidas das duas figuras geométricas. Uma das alterações que fazia relativamente a esta tarefa seria a formulação da questão: "Encontra as medidas das duas figuras nas condições descritas nas alíneas anteriores. Explica como procedeste." Com esta alteração eliminaria a falta de exatidão que se verificou: alguns alunos indicaram uma possível estratégia mas sem verificar se a mesma é exequível.

Em síntese, a aula decorreu conforme o planeado verificando-se, de um modo geral, o envolvimento dos alunos nas tarefas. As dúvidas foram esclarecidas de modo a não comprometer o trabalho autónomo. A entrevista decorreu nos 45 minutos consequentes, tendo sido entrevistados 3 pares de alunos. O 4.º par não foi entrevistado devido ao término das aulas da manhã. Este par foi acompanhado durante a aula e algumas questões da entrevista já tinham sido realizadas aquando do trabalho a pares. A planificação desta aula faz parte integrante deste relatório (Anexo XII). O guião das entrevistas realizadas aos pares de alunos é parte integrante da planificação elaborada.

Aula 4 – Dia 04 de maio de 2016

A 4.ª aula desta intervenção letiva começou de forma um pouco agitada. O sumário foi escrito no quadro com o objetivo de tentar concentrar as atenções dos alunos na aula. Durante o tempo de organização da entrada e da escrita do sumário, devolvi as tarefas realizadas na aula anterior com *feedback* escrito. Referi oralmente que a aula iria começar por salientar as dúvidas analisadas na tarefa das figuras geométricas, da aula passada. Este momento foi ajustado à planificação elaborada inicialmente, justificando-se pela existência de dúvidas a esclarecer. Assim, com a ajuda do PPT preparado, iniciei uma pequena discussão da tarefa referida. Relembrei as figuras, projetando-as e iniciei o questionamento com interpretação da imagem e das respetivas expressões algébricas do perímetro. Usei uma forma esquemática para relacionar as duas representações para facilitar a compreensão do que era pretendido. Escrevendo o sistema de duas equações, relembrei o significado do símbolo "$\Leftrightarrow$" e quando devemos usá-lo, introduzindo, assim, a definição formal de sistemas equivalentes: *Os sistemas de equações dizem-se equivalentes se tiverem o mesmo conjunto-solução* (ME, 2013). A discussão da resolução deste sistema foi feita com base na exploração das representações gráficas de cada reta, indicando os pares ordenados que alguns alunos indicaram como solução. Esta síntese, usando um exercício concreto que não tinha sido discutido com os alunos, demorou mais do que o previsto (deveria demorar 10 minuto mas demorou cerca de 20 minutos). Contudo, e dada a participação dos alunos na discussão, foi importante para consolidar os conhecimentos até então trabalhados e prosseguir com a aquisição dos novos conceitos. Projetei novamente a definição formal de solução de um sistema, referindo. E realcei que *o conjunto-solução de um sistema de duas equações corresponde ao ponto de interseção das duas retas* (Marques & Ferreira, 2014).

A aula continuou com a utilização da calculadora gráfica, conforme o previsto na planificação. Não havendo calculadoras gráficas em número suficiente, os alunos trabalharam em grupos de 3 ou 4 elementos mas os registos continuariam a ser feitos a pares. Esta tarefa requeria tempo para a sua realização pois a destreza na utilização da calculadora gráfica ainda é fraca. Em função do novo rumo da aula, com a alteração da planificação, poderia ter eliminado a primeira questão, em que solicito a escrita do sistema na forma canónica. Quando a planeei, era meu objetivo promover algum treino no manuseamento algébrico. De facto, a maior dificuldade não residiu neste manuseamento algébrico mas na introdução das expressões algébricas das retas na calculadora gráfica, além de fazerem a distinção entre a forma canónica e a que é necessária para trabalhar com a calculadora gráfica. Esta dificuldade fez com que alguns alunos desistissem de usar a calculadora e desistissem da resolução da tarefa. Nesta altura, deveria ter passado à explicação global para que todos entendessem de forma clara. Mas, quando me apercebi que a dúvida se repetia, já alguns pares iam mais avançados. A falta de tentativa em conseguir ultrapassar este obstáculo causou-me algum desânimo que tive que ultrapassar. Verifiquei que alguns pares tinham cometido erros no manuseamento algébrico e não estavam a obter a solução pretendida. Esta acumulação de dúvidas levou-me a uma reflexão rápida e a agir junto de cada grupo tentando minimizar as consequências. Numa reflexão posterior, teria construído as equações do sistema de modo a que introdução na calculadora gráfica fosse imediata, evitando os erros do manuseamento algébrico. Na verificação algébrica da solução, encontrada com a calculadora gráfica, não se registaram dificuldades. O ritmo do trabalho não foi o pretendido, ficando aquém do pretendido. O trabalho autónomo foi interrompido para se dar início à discussão, já fora do tempo considerado na planificação.

A discussão foi feita, não como tinha sido planeada mas com base nos conhecimentos anteriores sobre expressões algébricas das retas e quais as suas posições relativas em função dos valores obtidos para o declive e para a ordenada na origem. Era meu objetivo explorar as representações gráficas e em simultâneo explorar as expressões algébricas. No entanto, devido ao curto espaço de tempo ainda disponível para terminar a discussão esta foi abreviada, realçando uma forma de analisarem a classificação dos sistemas sem ter que chegar à solução. Este aspeto era para ser continuado a ser explorado com o sistema (A) do PPT mas não o fiz. Queria realçar que poderíamos chegar à conclusão da classificação do sistema sem chegar à solução, que teria de ser encontrada pela resolução gráfica. Deveria ter feito ao contrário, ou seja, continuar com a exploração da classificação do sistema e, então, questionar como poderíamos encontrar a solução do mesmo. Assim, tornar-se-ia mais explícito para que servia a calculadora gráfica. Levei a discussão para a solução ser apenas um par ordenado e não regressei à discussão inicial realçando o facto de que duas retas só se cruzam num único ponto. A discussão ficou incompleta apenas com o realce das características comuns. A planificação desta aula faz parte integrante deste relatório (Anexo XIII).

Aula 5 – Dia 06 de maio de 2016

A aula iniciou com o sumário já escrito no quadro e com a distribuição das fichas da aula passada com o respetivo *feedback* escrito. Enquadrei o tema da aula relativamente à unidade didática, referindo que nos aproximávamos do final desejado, ou seja, do manuseamento algébrico que nos permitiria resolver sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. Optei por elaborar um PPT com os dados da aula passada (questão cuja discussão ficou incompleta) inseridos num quadro de dupla entrada. Assim, analisando os aspetos globais das expressões algébricas, valores dos declives e das ordenadas na origem, e os aspetos gráficos que mereciam destaque por serem as referidas diferenças encontradas, estabeleci uma relação entre as duas representações. Para realçar a relação entre as representações gráficas e a classificação dos sistemas, elaborarei um gráfico que partia das posições relativas das retas e chegava à classificação dos sistemas. Solicitei o registo nos cadernos diários do quadro inicial mas com os valores dos declives e ordenadas na origem escritas de forma genérica. Esta opção pareceu-me importante porque nas aulas anteriores não tinham feito registos formais; contudo atrasou o desenvolvimento da aula porque os alunos arrastaram a ação da cópia. A alternativa a esta estratégia teria sido fornecer cópias com a síntese e os alunos colavam no caderno diário. Entretanto a tarefa destinada à aula estava a ser distribuída aos respetivos pares de alunos. A formalização ocorreu nos moldes descritos em seguida mas sempre acompanhado da respetiva representação gráfica (Anexo XIV). *Sistema possível e determinado: (i) tem uma única solução e (ii) graficamente as retas são concorrentes e intersetam-se num único ponto. Sistema impossível: (i) não tem solução e (ii) graficamente as retas são estritamente paralelas e não se intersetam. Sistema possível indeterminado: (i) tem infinitas soluções e (ii) graficamente as retas são paralelas coincidentes e intersetam-se em dois pontos* (Marques & Ferreira, 2014).

A calculadora gráfica era um recurso necessário à primeira parte da tarefa mas desta vez os alunos trabalharam a pares e iam alternando entre a resolução gráfica e a verificação algébrica. Esta solução foi adequada mas a gestão da troca da calculadora não foi a melhor entre os alunos. O ritmo de trabalho continuou a não ser o desejado por todos os alunos mas, de uma forma geral, os alunos estavam envolvidos na tarefa. Nesta tarefa, tal como na da aula anterior, repensava o sistema fornecido, alterando-o por um que não necessitasse de manuseamento algébrico prévio. Constatei que os erros algébricos não estavam a ser todos detetados e que os alunos estavam a encontrar outra solução que não a desejada. Optei, devido ao avanço da aula relativamente à planificação elaborada, por ajudar alguns alunos a encontrar os erros. Esta opção permitiu que estabelecessem as comparações pretendidas. Não esperava que os alunos chegassem rapidamente à conclusão que a solução encontrada graficamente correspondesse aos valores aproximados das frações indicadas no par ordenado que era dado para verificação algébrica. Atribuí este facto à preferência que estes alunos têm mostrado em trabalhar com representação em número decimal e não em fração. Na discussão desta tarefa optei por escrever o par ordenado com aproximação às décimas, como sugerido por um par de alunos, e utilizando a representação em fração

A tarefa seguinte, resolução do sistema de equações, usando a linguagem pictórica não foi realizada devido ao incumprimento dos tempos previstos na planificação e à sua semelhança com a tarefa da primeira aula, o enigma dos peluches. Em alternativa, aproveitei o sistema da tarefa discutida anteriormente para formalizar a resolução algébrica pelo método de substituição. Assim, parti do sistema conforme tinha sido introduzido na calculadora gráfica e, conjuntamente com a turma, fui realizando as substituições pretendidas. A planificação desta aula faz parte integrante deste relatório (Anexo XIV).

Aula 6 – Dia 09 de maio de 2016

Não houve discussão com o grupo turma porque os pares selecionados para o estudo de cariz investigativo iriam ser entrevistados em seguida. As tarefas selecionadas para esta aula visam a resolução de problemas no contexto da unidade didática.

A primeira tarefa, as maiores dificuldades foram a definição das variáveis e a escrita formal das duas condições que traduzissem o problema. O manuseamento algébrico não suscitou muitas dificuldades e as substituições foram sendo feitas com mais ou menos passos intermédios.

A segunda tarefa, "O triângulo isósceles", situação com contexto geométrico, recorreu às representações pictórica (figura com indicação das medidas dos lados em função das incógnitas a e b) e verbal (triângulo isósceles). Houve dificuldade em recordar as propriedades dos triângulos e no reconhecimento da simbologia usada para indicar lados de igual comprimento. O facto das duas letras, a e b, constarem da figura, permitiu que os alunos trabalhassem mais rapidamente no desenvolvimento do manuseamento algébrico. A planificação desta aula faz parte integrante deste relatório (Anexo XV). O guião das entrevistas realizadas aos pares de alunos é parte integrante da planificação elaborada.

Aula 7 – Dia 11 de maio de 2016

Esta foi a última aula da intervenção letiva, uma aula de 90 minutos dedicada à resolução de problemas e exercícios envolvendo todos os conceitos da unidade didática. A calculadora gráfica foi disponibilizada para os que optassem pelo seu uso na resolução de sistemas. Detetei uma falha nas fotocópias aquando da distribuição dos enunciados pois a 3.ª página não tinha sido fotocopiada. Solicitei aos alunos que contornassem estes problemas com a consulta do enunciado escrito no quadro.

Objetivando a recolha de dados para o estudo a que me proponho, os grupos selecionados foram alvo de questionamento de modo a entender os seus raciocínios e dificuldades. Os restantes alunos tiveram igualmente apoio para o trabalho autónomo. A planificação desta faz parte integrante deste relatório (Anexo XVI) bem como o questionário individual, entregue no final da aula.

Desafio Final

O desafio final, retirado de Marques e Ferreira (2014), não foi realizado apesar de estar programado para mais tarde. Não foi possível a realização desta tarefa devido às participações dos alunos em atividades de fecho do ano letivo e à realização das provas de aferição, na última semana de aulas.

Balanço Final

A lecionação desta unidade didática foi, para mim, um desafio interessante. A investigação do estado de arte e o planeamento das atividades permitiu que elaborasse uma proposta didática com tarefas encadeadas e orientadas às aprendizagens significativas dos alunos. Numa análise global, as planificações foram minimamente cumpridas com ajustes necessários à imprevisibilidade das ocorrências em sala de aula. O balanço final é, acredito, positivo mas verifico que devo melhorar as discussões, principalmente na sequenciação das estratégias a discutir. Em vários momentos verificou-se um diminuir no ritmo das aulas devido a uma escolha não equilibrada. As tarefas realizadas em impresso próprio promovem uma diminuição do ritmo de trabalho pois com a conclusão das mesmas os alunos encerram as suas atividades ou prolongam as suas realizações. Trata-se, obviamente, de uma situação particular devido à recolha de dados mas numa situação do dia-a-dia equaciona-se a utilização do manual escolar como muito positiva.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

A explicitação das opções metodológicas tomadas para o trabalho de cariz investigativo é de seguida apresentada. Prossigo com a explicitação dos critérios de seleção dos participantes e com a caracterização dos pares de alunos selecionados para o estudo. Por fim, não menos importante, faço a explicitação dos métodos de recolha de dados usados e os procedimentos associados à análise de dados.

Opções Metodológicas

Neste trabalho de cariz investigativo optei pelo paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem mista, usando dados quantitativos e qualitativos (Bogdan & Biklen, 1994). Contudo, a abordagem foi maioritariamente qualitativa pois o propósito foi o de não quantificar de forma absoluta, mas sim evidenciar as tendências dos alunos. Trata-se de uma investigação em pequena escala, centrada numa turma do 8.º ano e condicionada a um número limitado de aulas. Segundo os mesmos autores, o envolvimento do investigador com os sujeitos é outra característica relevante em estudos deste tipo. Estando o primeiro no ambiente natural dos segundos, a sala de aula, é promovido um envolvimento entre ambos. Este facto leva-nos a outra característica deste tipo de investigações que é a subjetividade na análise dos dados, pois como referem os autores "os dados carregam o peso de qualquer interpretação" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 67). Neste caso, o interesse pessoal é o principal, no sentido de valorizar os conhecimentos para a minha prática letiva futura. No entanto, e como referem Bogdan e Biklen (1994), "o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento" (p. 67) podendo este tornar-se útil perante a comunidade educativa, pela atualidade do tema e pela utilidade em sala de aula.

Cinco características principais são salientadas para investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) que importa realçar para o desenvolvimento do presente estudo. A primeira das quais diz que as investigações qualitativas são caracterizadas por uma recolha de dados feita, principalmente, pelo próprio investigador em ambiente natural, de modo a interagir naturalmente com os sujeitos. Neste caso, a sala de aula é o ambiente natural, estabelecendo relação professor-aluno. A segunda diz que os dados qualitativos são, na sua essência, descritivos, característica que se tornará mais evidente na descrição dos métodos de recolha de dados, adiante referidos. Por outro lado, as investigações qualitativas mostram mais interesse nos processos do que nos resultados obtidos, facto que se verifica neste estudo uma vez que se atribui maior importância à compreensão do processo de aprendizagem nas tarefas do que aos resultados obtidos nas mesmas. Interessa para este estudo o raciocínio desenvolvido na realização das diferentes estratégias bem como a análise nas dificuldades sentidas. A análise feita aos resultados não pretende confirmar qualquer conjetura inicial, corroborando com os autores que referem que a análise é feita de modo indutivo. No meu estudo, pretendo analisar apenas a turma observada sem estender os resultados a outros alunos da mesma faixa etária. Por fim, nas investigações qualitativas existe um grande interesse na compreensão dos significados atribuídos pelos participantes às suas vivências. É, pois, o que pretendo fazer, bastando para tal analisar as questões de investigação que formulei.

Participantes

Na investigação qualitativa, o conjunto de participantes deve ser circunscrito, de pequenas dimensões e sem pretensões de representatividade (Bogdan & Biklen, 1994; Tuckman, 2005). Neste trabalho, os participantes são os alunos da turma 8.º 1.ª da EB 2,3 de Fernando Pessoa. Contudo, selecionei quatro pares de alunos para aprofundamento do estudo, privilegiando os seguintes critérios: *(i)* diversidade de desempenho na Matemática e *(ii)* facilidade de acesso (Stake, 1995).

O critério sobre diversidade de desempenho ficou um pouco comprometido pela não autorização por parte dos encarregados de educação dos registos áudio e vídeo. Os níveis de menor desempenho corresponderam aos de menor autorização. Mediante as autorizações obtidas, organizei os pares que têm características específicas que passo a apresentar em seguida.

Isadora-Rui

Os dois alunos trabalham juntos desde o início do ano e revelam um bom desempenho e uma interajuda bastante positiva e muito produtiva, resultando em aprendizagens significativas para ambos. As características dos alunos são distintas, juntando-se o detalhe e cuidado nas respostas escritas de um com as respostas minimalistas mas precisas de outro. Ambos têm em comum a vontade de aprender, a boa disposição e uma elevada participação. Contudo, além do bom desempenho em Matemática, estes alunos têm dificuldades e dúvidas que as colocam com grande à vontade. A capacidade de comunicação e o interesse na disciplina foram, sem dúvida, os critérios de excelência para este par. A aluna Isadora enquadrou-se no nível 5 nos 1.º e 2.º períodos letivos enquanto o aluno Rui no nível 4 no 1.º período e no nível 5 no 2.º período letivo.

Isabel-Dália

As alunas não trabalham juntas desde o início do ano. Uma das alunas correspondeu a uma segunda escolha por falta de autorização da selecionada anteriormente. Desta forma, o par iniciou o trabalho conjunto apenas nas minhas aulas mas o bom relacionamento das alunas foi garantido pela opinião da Professora Cooperante e pela minha observação ao longo do ano letivo. As alunas têm um desempenho mediano com características que se complementam. Assim, a vontade de melhorar e de entender todos os passos de uma, complementam os conhecimentos e facilidade de aprendizagem de outra. A junção destas alunas teria também como objetivo melhorar o desempenho de ambas no sentido de promover uma autoajuda e um aumento de confiança nas aprendizagens da segunda. Contudo, não resultou da foram esperada pois as alunas mostraram alguma distração que as impediu de alcançar os objetivos por mim definidos. Os registos e dúvidas por elas colocadas foram de uma grande mais-valia para este estudo pois a comunicação e a simpatia são características comuns a ambas as alunas. As alunas enquadraram-se no nível 3 no 2.º período mas no 1.º período a Aluna Dália encontrava-se no nível 2.

David-Paulino

Os alunos trabalharam junto apenas para este trabalho. A junção destes alunos atendeu às características dos alunos e aos distintos níveis de desempenho a Matemática ao longo do ano. O aluno David enquadrou-se no nível 3 enquanto o aluno Paulino no nível 5 nos dois primeiros períodos letivos. Assim, à simpatia e respeito mútuo que demostraram, a pouca dedicação e dificuldades de um juntaram-se à elevada dedicação e facilidade de aprendizagem do outro. A dedicação do par foi elevada e bastante notória. Realço o interesse do aluno de melhor desempenho em incentivar e questionar o seu colega, no sentido de mostrar compreensão pelas diversas resoluções. As participações de ambos nas entrevistas foram bastante equilibradas evidenciando esta cumplicidade nas resoluções das tarefas. De grande interesse foi, durante a audição das gravações, ter a noção desta cumplicidade e verificar que ambos participavam ativamente na tentativa de esbatimento das dúvidas de ambos. Alguns desses momentos são relatados neste trabalho, na análise de dados.

Simone-Mário

Os alunos também trabalharam junto apenas para este trabalho. A seleção destes alunos prendeu-se com o desempenho de ambos e com os raciocínios que acompanhei mais de perto, o longo do ano letivo. Foram alunos que solicitaram muito a minha colaboração para ultrapassar as suas dúvidas, contudo, estavam habituados a trabalhar de forma isolada. O Mário trabalhou sempre sozinho e a sua mente nunca parava, os seus raciocínios acompanham as aulas de forma brilhante mesmo com a distração e os atrasos ocorridos a algumas das aulas. A Simone, habituada a trabalhar com um aluno bastante passivo e desinteressado, resolvia todos os seus exercícios individualmente. As suas dúvidas eram colocadas preferencialmente a nível privado, não gostando muito de se expor. Ambos tinham uma boa participação apesar de distintas na forma como o faziam. A junção deste par foi uma preocupação acrescida pelas já evidenciadas diferenças. Contudo, na primeira aula, ao juntar os alunos (que não reagiram muito bem) solicitei a participação de ambos de forma explícita e que a colaboração de ambos seria muito importante para o meu trabalho. A dedicação sentida durante as aulas e entrevistas foi muito positiva revelando que o par funcionou de forma muito saudável. Foi positivo para a Simone, acompanhar os raciocínios do Mário e vice-versa. A organização da primeira foi importante para a aprendizagem do segundo e a simplificação e concentração no que realmente importa evidenciado pelo Mário foi útil à Simone. A aluna Simone enquadrou-se no nível 5 nos dois primeiros períodos e Mário transitou do nível 4 para o nível 5 do 1.º para o 2.º períodos letivos.

Métodos de recolha de dados

Posicionei-me como observadora participante, que segundo Bogdan e Biklen (1994), é uma das "estratégias mais representativas da investigação qualitativa" (p. 16). Os métodos de recolha de dados considerados neste trabalho foram: *(i)* observação direta, *(ii)* recolha documental, *(iii)* entrevistas semiestruturadas e (*iv*) um questionário no final da intervenção letiva (Tuckman, 2005). A recolha de dados foi feita por mim, como investigadora.

Observação direta

A observação direta dos participantes, uma das principais características das investigações qualitativas, é a uma técnica de recolha de dados do indivíduo em atividade, permitindo uma comparação/compreensão entre o que justifica/explica e o que produz (Bogdan & Biklen, 1994). A observação direta foi feita em todas as aulas da minha intervenção, com registo vídeo e áudio, acompanhando o trabalho dos pares de alunos selecionados. Após cada aula, para manter as observações presentes e fidedignas, elaborei registos que me permitiram ter acesso aos detalhes importantes em qualquer fase da elaboração deste documento escrito. Os registos áudio/vídeo também permitiram o acesso fidedigno às situações do momento, bem como a outros detalhes que uma observação pós-aula possa permitir, nomeadamente uma observação da nossa conduta profissional no decorrer das aulas, corrigindo pequenas situações que assim se justifiquem.

As observações e registos feitos pela minha colega de mestrado foram também considerados e foram um complemento às minhas anotações pós-aula e um guia excelente dos tempos cumpridos ou não.

Recolha documental

Os documentos recolhidos correspondem às produções escritas dos alunos realizadas no decorrer das aulas. O objetivo foi ter acesso às representações e raciocínios dos alunos no sentido da concretização do objetivo de investigação. As tarefas foram sempre entregues em suporte papel com o respetivo espaço para a resposta para mais fácil recolha documental. Os alunos realizaram as tarefas em pares, com algumas exceções, registando uma resposta única no respetivo suporte. A entrega dos trabalhos aos pares ocorreu após um *feedback* escrito, exceto na tarefa da primeira aula, e sempre em duplicado de modo a não privilegiar nenhum dos alunos.

Os registos escritos apresentados neste documento foram selecionados com o objetivo de tornar possível a análise para ser possível dar resposta às questões de investigação. Compreender as estratégias de resolução, as dificuldades sentidas e como mobilizam os conhecimentos prévios são itens que me permitem ter acesso ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Com o objetivo de ter acesso a estes itens, solicitei aos alunos que realizassem as tarefas a esferográfica e que não se preocupassem com os erros que ficassem registados. Expliquei qual o objetivo do estudo para que eles colaborassem comigo. Contudo, ao longo das aulas verifiquei, apesar de solicitar os vários registos, que alguns alunos escreviam em folhas de rascunhos os seus raciocínios iniciais e que registavam a resposta final. Um dos pares realizou as tarefas a pares, tendo apagado algumas das produções.

Entrevista

As entrevistas, em combinação com a observação direta, são essenciais para a concretização do objetivo de investigação. Neste estudo optei por entrevistas semiestruturadas a quatro pares de alunos. Este grau de estruturação das entrevistas tem a vantagem, segundo Bogdan e Biklen (1994), de obter dados comparativos entre os vários alunos selecionados. Para isso foram elaborados guiões. Tuckman (2005) refere ainda outras vantagens deste tipo de entrevistas, dos quais realço a facilidade que permite na sistematização dos dados e um maior controlo na informação recolhida. As entrevistas foram realizadas e registadas em suporte áudio/vídeo com o objetivo de compreender as estratégias escolhidas pelos pares de alunos selecionados. A informação recolhida durante as entrevistas foi um complemento à análise das respetivas produções escritas que serviram de base à obtenção das respostas às questões de investigações.

Questionário

O questionário não costuma ser usado em investigações qualitativas pois conferem um distanciamento do investigador e conferem uma avaliação quantitativa dos dados (Bogdan & Biklen,1994). O questionário que optei por fazer no final da intervenção letiva prende-se com uma avaliação, de certo modo quantitativa, sobre algumas preferências dos alunos em termos de trabalho. Tendo este trabalho de investigação decorrido num curto espaço de tempo, a avaliação que faço sobre a utilização da calculadora gráfica não será muito fiável. As entrevistas não foram em número suficiente de modo a analisar de forma isenta tais aspetos. Desta forma, solicitando a colaboração da turma, elaborei um questionário anónimo com algumas questões de pergunta imediata e outras mais abertas, de modo a dar liberdade aos alunos para se expressarem. Este questionário incidiu, principalmente, na utilização da calculadora gráfica como recurso usado nas aulas.

Análise de Dados

A análise de dados caracteriza-se pela organização sistemática dos dados com o propósito de responder, o mais fielmente possível, às questões de investigação. A organização escolhida para a análise dos dados recolhidos contempla este objetivo e a análise teve por base a revisão de literatura feita anteriormente. A busca de padrões e o realçar de aspetos importantes são alvos de uma análise qualitativa e interpretativa mais detalhada (Bodgan & Biklen, 1994) objetivando-se a atribuição de sentido a este trabalho de cariz investigativo e à minha prática letiva futura. No sentido de tornar mais rica a análise de dados, considerei todos os dados recolhidos: notas de campo, produções escritas de toda a turma, registo vídeo das aulas lecionadas, registo áudio da realização das tarefas e das entrevistas aos quatro pares de alunos selecionados e o questionário anónimo. A observação de aulas, ao longo de todo o ano letivo, foi um dado valioso que me permitiu conhecer melhor os alunos. Seria impossível alcançar as representações mentais dos alunos, principalmente dos que manifestam mais dificuldades, sem ter um conhecimento prévio de cada um. Não pretendi 'rotular' os alunos mas sim estabelecer conexões afetivas de modo a sentir minimamente as suas vivências matemáticas e respeitar a identidade de cada um.

As categorias de análise definidas respeitam a ordem das questões de investigação. Considerei três categorias de análise (Quadro 4.1): (*i*) simbologia algébrica, (*ii*) sistemas de representação e (*iii*) resolução de problemas. Para cada uma delas realcei aspetos relevantes e, como referido anteriormente, algum padrão que permitisse a caracterização da turma no que diz respeito à categoria em análise. A primeira categoria incluiu (*i*) o *sentido de símbolo*, adotando a nomenclatura de Arcavi (2006), e (*ii*) o *sentido de variável*, adotando a nomenclatura de Ursini e Trigueros (2011). Na categoria dos sistemas de representação foram consideradas (*i*) os *tipos representações* usadas pelos alunos e (*ii*) a *representação preferencial* demostrada, pretendendo dar resposta à segunda questão de investigação. Na resolução de problemas são analisadas (*i*) a *compreensão dos enunciados*, (*i*) as *estratégias de resolução* utilizadas e (*ii*) a *interpretação da solução matemática* face ao contexto do problema. As dificuldades dos alunos foram abordadas ao longo da análise e destacadas para cada uma das categorias.

Quadro 4.1 *Categorias de análise definidas.*

<table>
<tr><td rowspan="7">Categorias de Análise</td><td rowspan="2">Simbologia algébrica</td><td>1. Sentido de Símbolo</td></tr>
<tr><td>2. Sentido de Variável</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sistemas de Representação</td><td>1. Tipos de Sistemas de Representação</td></tr>
<tr><td>2. Representação Preferencial</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Resolução de Problemas</td><td>1. Compreensão dos Enunciados</td></tr>
<tr><td>2. Estratégias de Resolução</td></tr>
<tr><td>3. Interpretação da Solução Matemática</td></tr>
</table>

Simbologia algébrica

A simbologia algébrica foi analisada em duas subcategorias: (*i*) sentido de símbolo e (*ii*) sentido de variável. A nomenclatura usada está em concordância com a do quadro teórico elaborado, assim, considerei que o *símbolo* refere-se a toda a simbologia algébrica com exceção da letra que é designada por *variável*, independentemente do modo como é usada. Esta análise pretende dar resposta à primeira questão de investigação, procurando saber se os alunos compreendem a reconceptualização dos símbolos algébricos e se adquiriram o sentido de *símbolo* e de *variável*, fundamentais para desenvolver o pensamento algébrico com compreensão.

Sentido de Símbolo

O *sentido de símbolo* foi inspecionado mediante o quadro teórico desenvolvido e teve por base parte do conjunto de indicadores referente ao sentido de símbolo, a ter em atenção na passagem da Álgebra operacional para a estrutural, considerados por Grossman, Gonçalves e Ponte (2009) e a lista de objetivos, descritos por Arcavi (1994), para o desenvolvimento do sentido de símbolo por parte do aluno. No primeiro caso, os autores consideraram quatro categorias principais: expressões numéricas, equações, problemas e funções. Contudo, para esta análise os indicadores foram adaptados para as equações literais e sistemas de equações (Quadro 4.2).

Quadro 4.2 *Subcategorias de análise definidas para o sentido de símbolo*

Sentido de Símbolo	1. Estar familiarizado com os símbolos e seus significados, compreendendo os diferentes papéis que estes podem desempenhar.
	2. Sentir o problema a partir da inspeção de símbolos e intuir quando e como usar cada símbolo.
	3. Traduzir a linguagem corrente, ou outra, para linguagem simbólica.
	4. Manipular simbolicamente utilizando procedimentos adequados (princípios de equivalência, entre outros).
	5. Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais.
	6. Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.

Nota. Adaptado de Arcavi, 1994 e Grossman, Gonçalves, & Ponte, 2009

Sentido de Variável

O *sentido de variável* foi analisado mediante o quadro teórico desenvolvido e teve por base o Modelo 3UV (3 utilizações para as variáveis) desenvolvido por Ursini e Trigueiros (2011). Os indicadores foram adaptados para o sentido de variável em equações literais e sistemas de equações mas as subcategorias são as mesmas (Quadro 4.3), definidas em função do papel que desempenham: (*i*) número generalizado, (*ii*) incógnita ou (*iii*) variável numa função relacional.

Quadro 4.3 *Subcategorias de análise definidas para o sentido de variável*

Sentido de Variável	**Número Generalizado**	1. Atribuir valores à variável e obtêm resposta.
		2. Manipular simbolicamente por simplificação de expressões numéricas.
		3. Traduzir símbolos, frases ou regras.
	Incógnita	1. Capacidade de substituir símbolos por um ou mais valores que transformem a equação numa proposição verdadeira.
		2. Determinar o valor da(s) incógnita(s) que surge(m) numa equação ou problema, por aplicação das operações algébricas e/ou aritméticas adequadas.
		3. Reconhecer a presença de uma ou duas quantidades desconhecidas pode ser determinada atendendo aos dados fornecidos.
		4. Expressar a solução de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas como um par ordenado e reconhecer que este par ordenado é solução das duas equações em simultâneo.
	Variável numa relação funcional	1. Reconhecer a correspondência entre quantidades nas representações gráficas e/ou algébricas.
		2. Determinar o valor da variável independente dado o valor da variável dependente e vice-versa.
		3. Reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, qualquer que seja a sua forma de relação.

Nota. Adaptado de Ursini & Trigueiros, 2011

Três tarefas foram elaboradas com o propósito de averiguar se os alunos consideram as quantidades desconhecidas como incógnitas. Pretende-se averiguar o significado atribuído à letra e contribuir para que seja potenciado. Na Tarefa "Planear escadas com a Matemática" as incógnitas estão definidas no enunciado. Por sua vez, na Tarefa "O muro da D. Rosa" (Tarefa 1 da Ficha "Aplico o que Aprendi – 1") as incógnitas não estão definidas face ao contexto. Em ambas são fornecidas as relações estruturais entre as quantidades desconhecidas: na primeira existem duas relações consideradas, enquanto na segunda existe apenas uma. Nas duas tarefas os dados do enunciado são dados em linguagem natural e de forma pictórica. Na tarefa "Prova de Atletismo" os dados são fornecidos em linguagem natural e complementados pela linguagem gráfica. A relação funcional entre as variáveis não é dada de forma explícita.

Sistemas de Representação

Nesta categoria são consideradas para análise os (*i*) *tipos representações* usadas pelos alunos e a (*ii*) *representação preferencial* face ao contexto.

Tipos de Sistemas de Representação

A análise da primeira subcategoria baseia-se nos vários tipos de sistemas de representação considerados por Nobre, Amado e Ponte (2011) para a resolução de problemas (Quadro 4.4).

Quadro 4.4 *Subcategorias de análise para os tipos de sistemas de representação*

<table>
<tr><td rowspan="8">Tipos de Sistemas de Representação</td><td>Verbal / Sintático</td><td>1. Explicar o raciocínio e as estratégias, como complemento de outro modo de representação.</td></tr>
<tr><td>Pictórico</td><td>1. Recorrer a desenhos ou imagens para apresentar, conjugar e sintetizar a informação.</td></tr>
<tr><td>Aritmético</td><td>1. Utilizar estratégias de tentativa e erro, de desfazer ou de uso de tabelas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Gráfico</td><td>1. Utilizar gráficos de variáveis discretas ou contínuas, mostrando a variação – Lápis e Papel.</td></tr>
<tr><td>2. Utilizar gráficos de variáveis discretas ou contínuas, mostrando a variação – Calculadora Gráfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Algébrico</td><td>1. Utilizar linguagem simbólica para generalizar ou evidenciar as relações entre as quantidades desconhecidas.</td></tr>
<tr><td>2. Utilizar linguagem simbólica para representar/simplificar sistemas de equações.</td></tr>
</table>

Nota. Adaptado de Nobre, Amado, & Ponte, 2011

As representações gráficas podem ser obtidas por (*i*) *lápis e papel* ou por (*ii*) *recursos tecnológicos*. Apesar de ser estimulada desde muito cedo no currículo escolar, duas questões se levantam sobre este tipo de representação: (*i*) a dificuldade e a morosidade na elaboração de gráficos e com rigor por parte dos alunos usando lápis e papel e (*ii*) as conclusões erróneas que daí podem advir. Estas preocupações levaram-me a introduzir a calculadora gráfica como recurso tecnológico capaz de conferir rigor à produção dos alunos e, assim, verificar se poderia ser um dos métodos preferenciais dos alunos. Importa referir que a calculadora gráfica foi introduzida pela Professora Cooperante antes da minha intervenção letiva. Os alunos tiveram duas aulas de 90 minutos com esta tecnologia que, não sendo muito tempo, deu-lhes alguma experiência para manusear as ferramentas pretendidas. Sendo este um recurso valorizado neste tipo de representação, era necessário analisá-lo com mais detalhe. Contudo, o trabalho desenvolvido não me permitiu ter a perceção das vantagens e desvantagens identificadas pelos alunos. Assim, a análise foi feita com base num questionário anónimo (Anexo XVII) que distribui aos alunos no final da intervenção letiva. Duas das questões possibilitaram a análise (*i*) do grau de dificuldade no *manuseamento* e (*ii*) das *vantagens e desvantagens* da sua utilização. A análise das respostas foi feita de modo a agrupar aspetos comuns de modo a elaborar gráficos que permitiram a leitura imediata dos resultados.

Sistemas de Representação Preferencial

Esta subcategoria baseia-se na análise das produções dos alunos e numa das questões do questionário anónimo (Anexo XVII). A análise das respostas foi feita de modo a agrupar aspetos comuns de modo a elaborar gráficos que permitiram a leitura imediata dos resultados.

Resolução de Problemas

A exploração das estratégias de resolução possibilitam ao aluno sentir o problema por meio dos símbolos e optar pelo sistema de representação que melhor se adapte à sua preparação. As diferentes estratégias possibilitam também as transformações entre sistemas de representação, conferindo aprendizagens mais significativas. Atendendo a estes pontos, a análise desta categoria foi feita com base (*i*) na *compreensão do enunciado*, (*ii*) na *escolha da estratégia de resolução* e (*iii*) na *interpretação da solução matemática* obtida face ao contexto do problema (Quadro 4.5).

Quadro 4.5 *Subcategorias de análise definidas para a resolução de problemas*

Resolução de problemas	**Compreensão do enunciado**	1. Compreensão das linguagens utilizadas.
		2. Compreensão do contexto, de forma global.
		3. Distinguir os dados indispensáveis dos dispensáveis.
	Escolha da estratégia de resolução	1. Identificação das incógnitas.
		2. Escolha e explicitação da estratégia de resolução.
		3. Obtenção da solução matemática.
	Interpretação da solução matemática	1. Identificar os valores obtidos para o conjunto solução viáveis face ao contexto do problema, caso exista.
		2. Apresentar justificações sólidas com base na contextualização.
		3. Proceder à verificação das soluções encontradas.

A fim de promover uma análise completa e isenta de enviesamentos, formei três grupos de problemas em função do enunciado: (*i*) não contextualizados, (*ii*) com contextualização próxima do real e (*iii*) com contextualização geométrica. As tarefas utilizadas (Quadro 4.6) para esta análise são as que fazem parte das aulas de consolidação de conhecimentos, presentes nas fichas "Aplico o que aprendi".

Quadro 4.1: Tarefas consideradas para a análise em função do tipo de enunciado

Grupo	Designação da Tarefa	Ficha	Questão selecionada
Não contextualizada	Seleção da solução (escolha múltipla)	Aplico o que aprendi - 3	Questão 1
	Resolução de Sistemas	Aplico o que aprendi - 3	Questão 3
Contexto próximo ao real	"Os iogurtes para o acampamento"	Aplico o que aprendi - 2	Tarefa 1
	"Os coelhos e as galinhas"	Aplico o que aprendi - 3	Questão 2
Contexto geométrico	"Figuras Geométricas"	Aplico o que aprendi - 1	Tarefa 2
	"Triângulo Isósceles"	Aplico o que aprendi - 2	Tarefa 2

Considerações de natureza ética

As exigências éticas necessárias para uma investigação educacional foram consideradas neste estudo tendo em atenção que os participantes são menores de idade e que, após conclusão, ficará disponível para consulta (Tuckman, 2005).

No início do ano letivo foi enviada uma comunicação aos Encarregados de Educação a informar sobre a minha presença nas salas de aula e, em simultâneo, um pedido de autorização para a participação dos alunos de uma forma geral no meu estudo (Anexo XVIII). Foram consideradas as autorizações e foram tidos cuidados adicionais nos registos áudio/vídeo para os alunos cujo Encarregados de Educação não deram autorização para participarem no estudo. Estes alunos ficaram automaticamente excluídos da seleção que foi feita posteriormente. Assim, a seleção definitiva dos participantes foi considerada depois de obtidas as autorizações de participação por parte dos respetivos Encarregados de Educação e por meio de um segundo documento escrito (Anexo XIX). É considerado o direito à não-participação, podendo esta ocorrer em qualquer fase do estudo. O direito ao anonimato dos participantes ficou garantido pela utilização de nomes fictícios dos alunos (Tuckman, 2005).

Foram respeitados os protocolos entre a Escola acolhedora e o Instituto de Educação e, da minha parte, foi garantido o sentido de responsabilidade e de respeito pelos participantes (Tuckman, 2005).

5. Análise de Dados

> A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (Bodgan & Biklen, 1994, p. 205)

As categorias de análise definidas, evidenciadas neste capítulo, respeitam a ordem das questões de investigação. Assim, foram consideradas três categorias de análise, estruturadas em subcapítulos: (*i*) simbologia algébrica, (*ii*) sistemas de representação e (*iii*) resolução de problemas. As dificuldades dos alunos foram abordadas ao longo da análise e destacadas para cada uma das categorias.

Simbologia algébrica

A simbologia algébrica é analisada em duas subcategorias: (*i*) sentido de símbolo e (*ii*) sentido de variável. Com esta análise pretendi responder à primeira questão de investigação, procurando saber se os alunos compreenderam a reconceptualização dos símbolos algébricos e se adquiriram sentido de *símbolo* e de *variável*, essencial para desenvolver o pensamento algébrico com compreensão.

Sentido de símbolo

A fim de saber qual o *sentido de símbolo* que os alunos desta turma têm desenvolvido, e com base nos itens definidos para esta subcategoria, destaco e exemplifico cada um deles bem como as dificuldades sentidas.

Familiarização com os símbolos e seus significados

Ao longo do ano letivo a observação direta das aulas e o apoio prestado aos alunos, ajudou-me a compreender que, de uma forma geral, a turma está familiarizada com os símbolos. Contudo, alguns alunos manifestam dificuldades na interpretação dos seus significados. Uma aluna, durante o 2.º período letivo, verbalizou a sua dificuldade com o que apelidou de "código matemático", chegando a referir que "umas vezes usámos números, outras usámos letras" e que "não percebo quando se usa um ou outro". O desabafo desta aluna alertou-me para o questionamento pontual sobre determinados significados dos símbolos usados de modo a possibilitar aos alunos uma maior reflexão sobre os símbolos escolhido e as suas justificações.

O par António-Rodrigo mostra (Figura 5.1) algum domínio sobre a simbologia algébrica mas não a preocupação de escrever a expressão geral. Efetuaram uma tradução correta da linguagem natural e pictórica para a simbólica mas sem a explicação clara da estratégia escolhida.

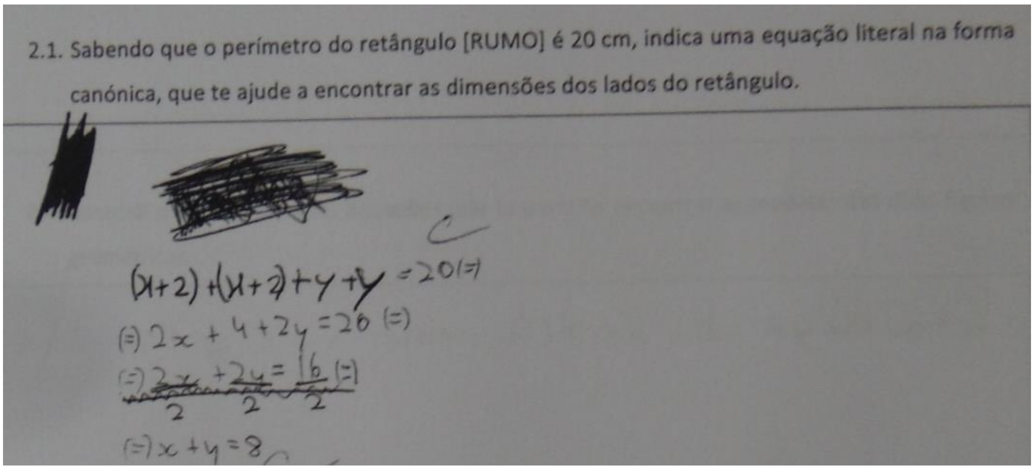


Figura 5.1 - Resolução do par Rodrigo-António à questão 2.1 da Tarefa 2 da Ficha "Aplico o que aprendi – 1"

O mesmo domínio não é evidente em outra resolução do par António-Rodrigo (Figura 5.2).

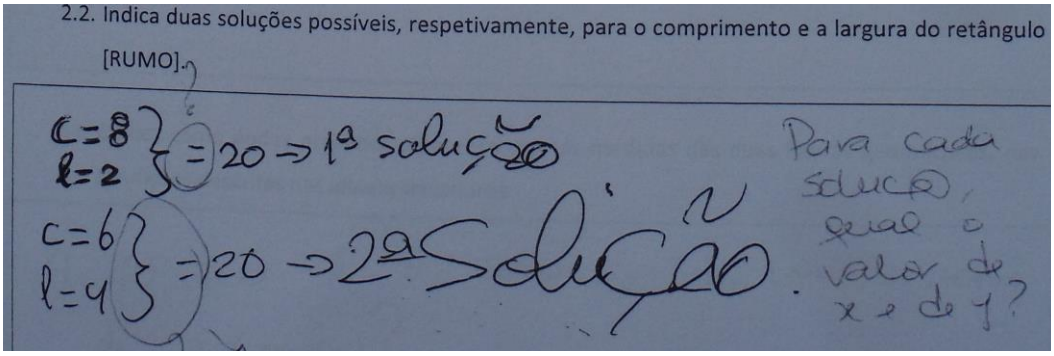


Figura 5.2 - Resolução do par Rodrigo-António à questão 2.2 da Tarefa 2 da Ficha "Aplico o que aprendi – 1"

Os alunos evidenciam uma *representação própria*, recorrendo a uma escrita bastante simplificada que pretende dar duas soluções possíveis para o problema A escrita utilizada evidencia a falta de *compreensão da simbologia* algébrica como uma linguagem universal, apesar de terem algum conhecimento sobre como a utilizar. A utilização das chavetas não foi a correta do ponto de vista algébrico e a *falta de utilização do sinal de equivalência* foi evidente.

O par António-Rodrigo evidenciou *falta de compreensão da simbologia algébrica* (Figura 5.3) quando indicou duas soluções repetindo os mesmos erros de escrita, a utilização do *sinal de igual como um operador* e a *do sinal de equivalente entre duas expressões não equivalentes* por consequência do erro anterior.

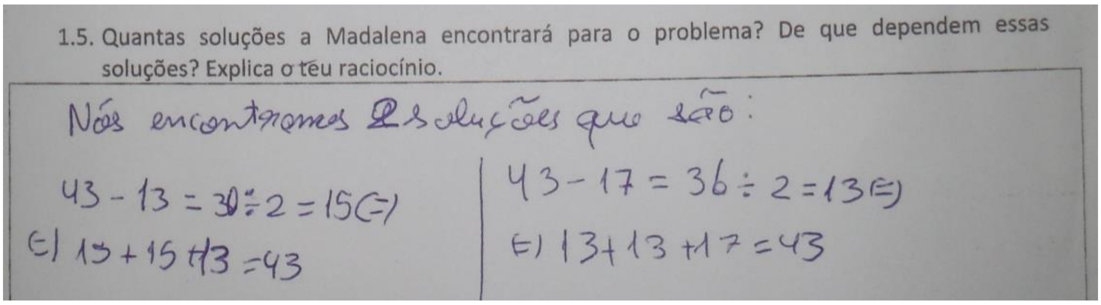


Figura 5.3 - Resposta do par António-Rodrigo à questão 1.1 da tarefa "Compreendo equações literais"

Intuição sobre o uso dos símbolos

O par Carla-Bruno utilizou os símbolos algébricos para encontrar duas soluções (Figura 5.4), contudo, não os utiliza da forma adequada. A intuição da resolução algébrica foi substituída por uma resolução tentativa-erro. A atribuição de valores e a respetiva substituição (risca as soluções que não satisfazem a condição) evidenciam a não compreensão da potencialidade dos símbolos, não sentido o problema a partir destes. A utilização do sinal de disjunção para indicar que há duas soluções possíveis (uma *ou* outra) também evidencia a *falta de intuição* na sua utilização. Posso inferir que o seu uso é promovido pela associação de utilização aquando das soluções das equações do 2.º grau estudadas este ano e que, ao apresentar duas soluções, este era o sinal utilizado. O símbolo foi usado duas vezes, numa representação própria, tanto nos valores considerados para as incógnitas (primeira linha da resolução) como para as verificações de uma forma global (meio da resolução).

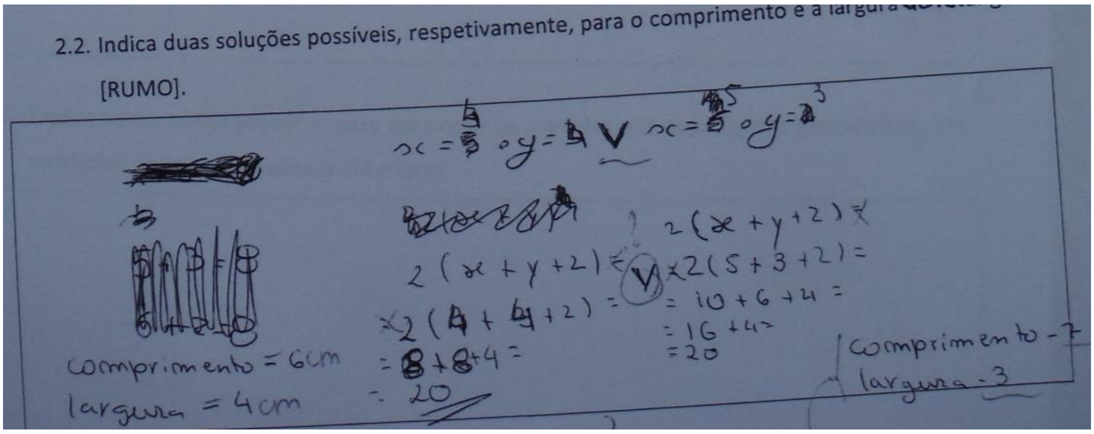


Figura 5.4 - Resolução do par Carla-Bruno à questão 2.2 da Tarefa 2 da Ficha “Aplico o que aprendi – 1”

Numa outra tarefa o mesmo par, Carla-Bruno, recorreu à estratégia tentativa-erro para encontrar duas soluções que verificam a situação, apesar de traduzirem o problema algebricamente na questão seguinte (Figura 5.5). A utilização do símbolo algébrico não surgiu naturalmente, não invocando utilidade na sua aplicação.

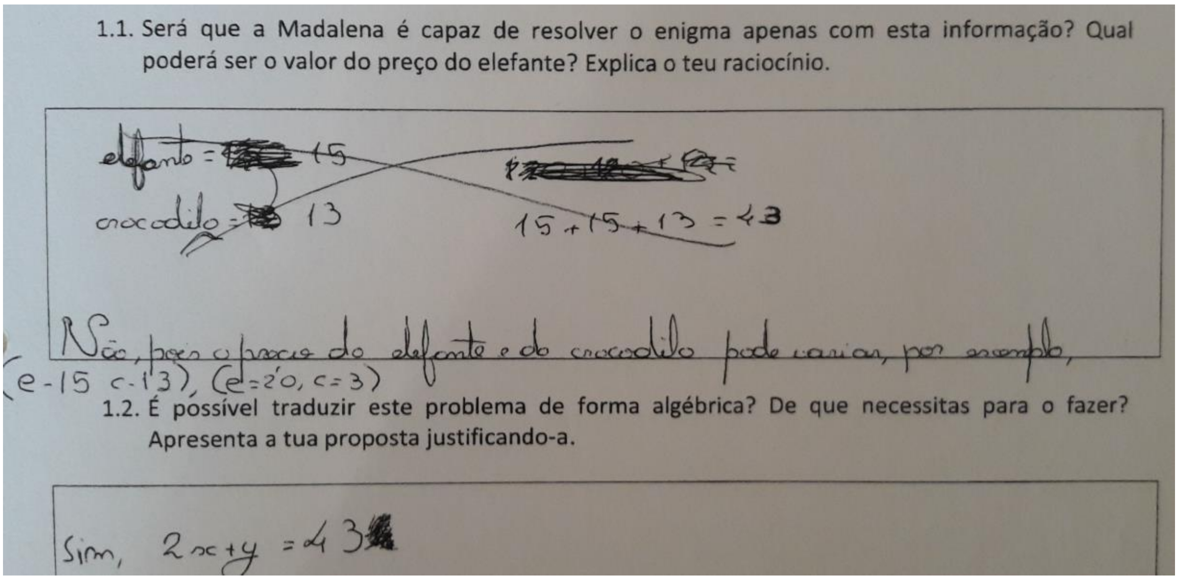
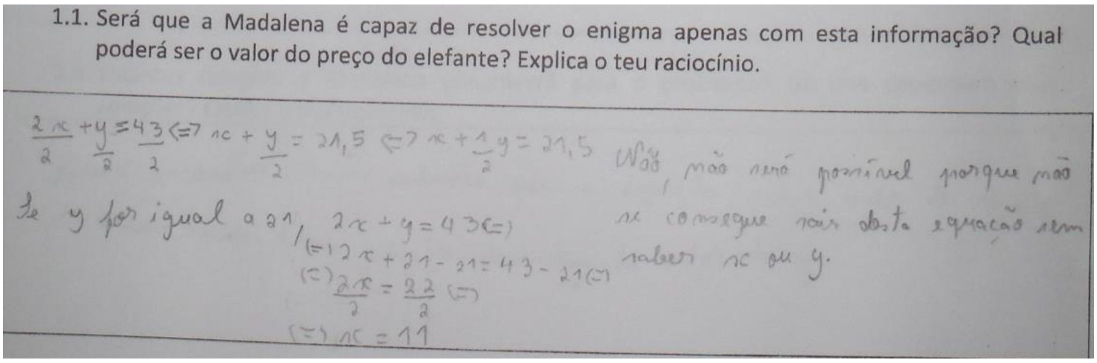


Figura 5.5 - Resposta do par Carla-Bruno à questão 1.1 e 1.2 da tarefa “Compreendo equações literais”

Nos alunos com mais destreza na Álgebra representação algébrica surgiu naturalmente na resolução problemas com um ou duas condições, mesmo antes da respetiva formalização. Contudo, alguns alunos necessitavam da verificação da resposta para além da resolução algébrica. Por exemplo a resolução do par Paulo-Tomás (Figura 5.6) é algébrica mas a resposta final é dada depois da concretização para uma situação particular.


1.1. Será que a Madalena é capaz de resolver o enigma apenas com esta informação? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

$\frac{2x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{43}{2} \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} = 21,5 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}y = 21,5$

Não, não será possível porque não se consegue tirar desta equação sem saber x ou y.

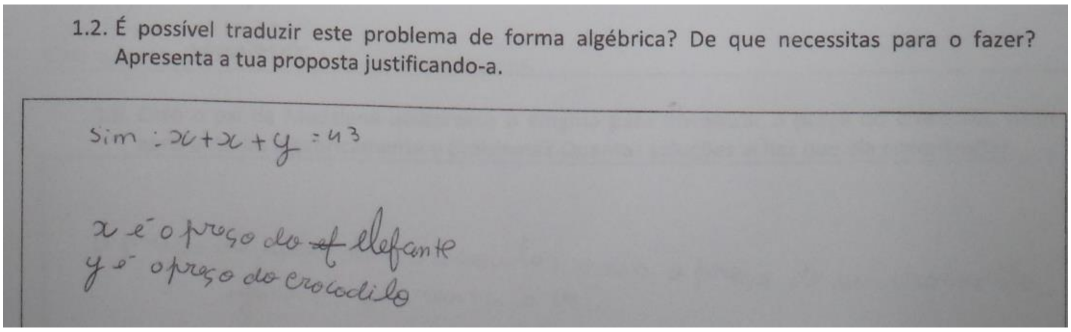
Se y for igual a 21, $2x + y = 43 \Leftrightarrow 2x + 21 - 21 = 43 - 21 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{22}{2} \Leftrightarrow x = 11$

Figura 5.6 - Resposta do par Paulo-Tomás à questão 1.1 da tarefa “Compreendo equações literais”

O manuseamento algébrico foi feito com cuidado mas a aplicação dos princípios de equivalência evidenciados passo a passo. O par reconheceu, pela análise da resposta escrita, que o valor de uma incógnita depende do valor da outra mas precisou de um caso concreto para verificar a sua análise.

Tradução para linguagem simbólica

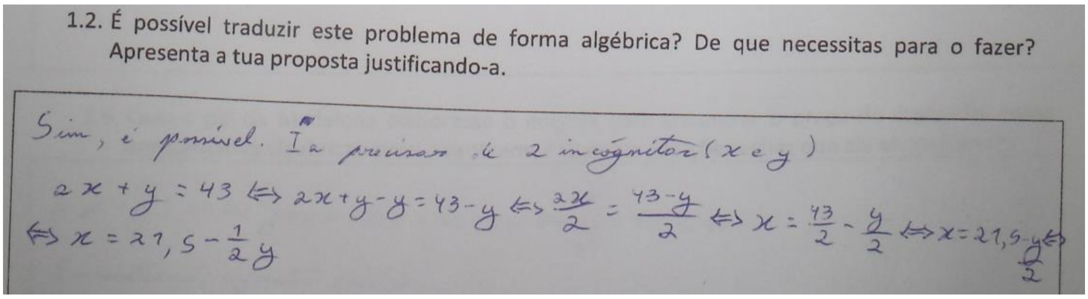
Os dois exemplos que apresento respondem com clareza e correção à tradução solicitada para linguagem. Contudo, enquanto o par Marília-Gabriel apenas indicou a equação sem simplificar os monómios semelhantes (Figura 5.7), o par Fernando-Diana indicou e resolveu a equação em ordem a *x*, que se deduz que seja o valor do preço do peluche elefante (Figura 5.8). As duas traduções são bem conseguidas mas uma faz além do solicitado. A utilização da simbologia algébrica é bem conseguida com a compreensão do enunciado, neste caso, recorrendo à representação pictórica.


1.2. É possível traduzir este problema de forma algébrica? De que necessitas para o fazer? Apresenta a tua proposta justificando-a.

Sim: $x + x + y = 43$

x é o preço do ~~ef~~ elefante
y é o preço do crocodilo

Figura 5.7 - Resposta do par Marília-Gabriel à questão 1.2 da tarefa 1



1.2. É possível traduzir este problema de forma algébrica? De que necessitas para o fazer? Apresenta a tua proposta justificando-a.

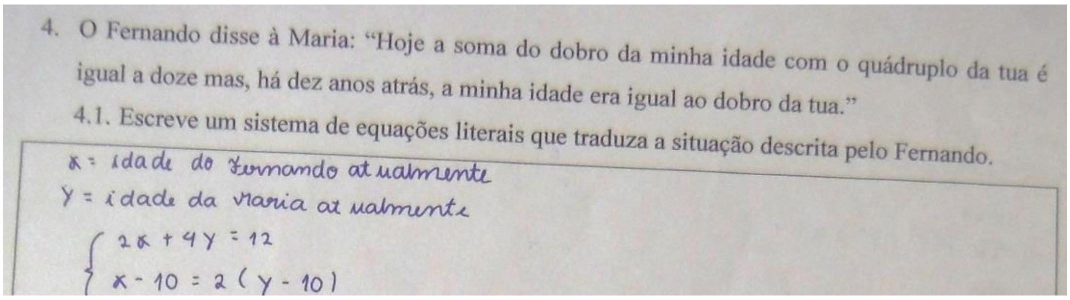
Sim, é possível. Iria precisar de 2 incógnitas (x e y)

$2x+y=43 \Leftrightarrow 2x+y-y=43-y \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{43-y}{2} \Leftrightarrow x=\frac{43}{2}-\frac{y}{2} \Leftrightarrow x=21,5-\frac{y}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=21,5-\frac{1}{2}y$

Figura 5.8 - Resposta do par Fernando-Diana à questão 1.2 da tarefa 1

Evidencio três outros exemplos com sistemas de duas equações, um em que o par consegue traduzir o problema, definindo corretamente o significado das incógnitas (Figura 5.9), outro em que o aluno traduz incorretamente o problema por uma definição incorreta das variáveis (Figura 5.10) e o último que apenas tem escrito o sistema que não traduz o enunciado e não apresenta definição das incógnitas (Figura 5.11). Daqui se compreende que a tradução do problema para linguagem simbólica passa também pela atribuição de sentido à letra (como incógnita) e à contextualização em si. A análise a estas subcategorias será feita mais adiante. Quanto à simbologia algébrica, a tradução é bem conseguida com a correta utilização dos símbolos. Nos três casos verifica-se a correta interpretação do sinal de igual, do sinal de equivalente e da chaveta, na resolução de uma conjunção de condições (sistema).



4. O Fernando disse à Maria: "Hoje a soma do dobro da minha idade com o quádruplo da tua é igual a doze mas, há dez anos atrás, a minha idade era igual ao dobro da tua."

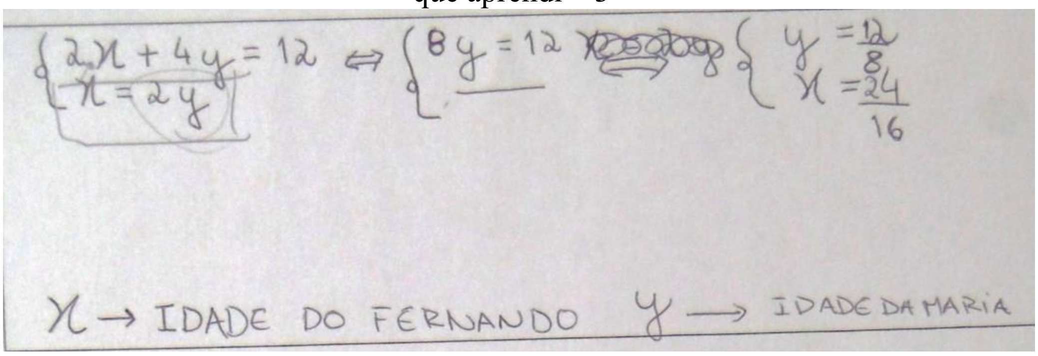
4.1. Escreve um sistema de equações literais que traduza a situação descrita pelo Fernando.

x: idade do Fernando atualmente

y = idade da Maria atualmente

$\begin{cases} 2x+4y=12 \\ x-10=2(y-10) \end{cases}$

Figura 5.9 - Resolução do par Simone-Mário à questão 4 da Ficha de Trabalho "Aplico o que aprendi – 3"



$\begin{cases} 2x+4y=12 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=12 \\ \quad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{12}{8} \\ x=\frac{24}{16} \end{cases}$

x → IDADE DO FERNANDO   y → IDADE DA MARIA

Figura 5.10 - Resolução do aluno Alberto à questão 4 da Ficha de Trabalho "Aplico o que aprendi – 3"

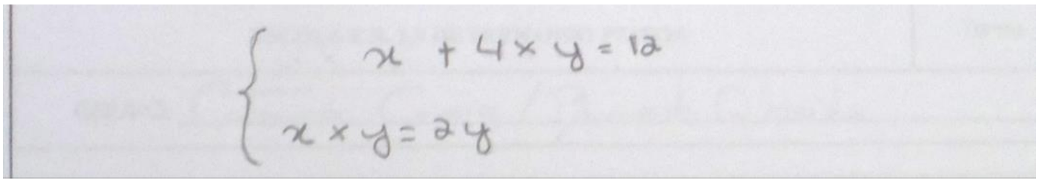


Figura 5.11 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 4 da Ficha de Trabalho “Aplico o que aprendi – 3”

Manipulação simbólica adequada

Os alunos, de um modo geral, operam corretamente os monómios semelhantes, aplicam corretamente a propriedade distributiva da multiplicação bem como os princípios de equivalência. Contudo, dada a pouca prática com sistemas de duas equações, por vezes verifica-se a ocorrência de alguns erros que passo a evidenciar. O par Gustavo-Marília equaciona corretamente o problema mas não compreende o significado da solução obtida utilizando procedimentos inadequados na segunda tentativa de resolução (Figura 5.12). Na primeira estratégia (riscada) os alunos apenas cometem um erro aritmético. Na segunda, não cometem o mesmo erro mas utilizam procedimentos inadequados, como se pode ver nas duas últimas linhas da resolução, multiplicando os monómios $2x$ e $2y$ em vez de manter a adição; provavelmente resultante de uma má interpretação da própria escrita ou por confusão na realização das operações.

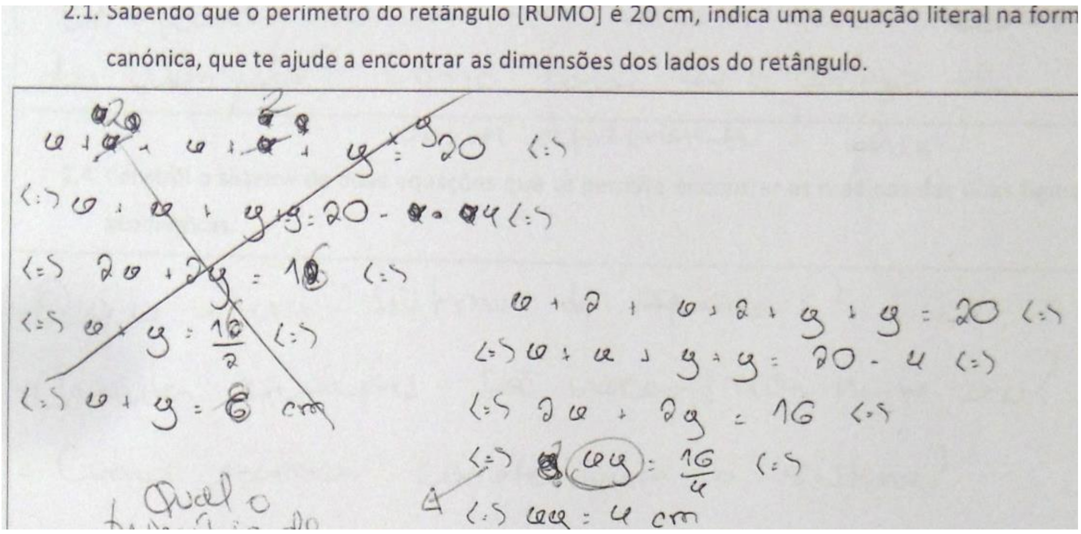


Figura 5.12 - Resolução do par Gustavo-Marília à questão 2.1 da Tarefa 2 da Ficha de Trabalho “Aplico o que aprendi – 1”

Dos quatro pares de alunos selecionados para as entrevistas e gravações das aulas, um evidenciou ter bastantes dificuldades na *manipulação algébrica.* A fim de evidenciar esta dificuldade, apresento um conjunto de respostas da tarefa “Compreendo equações literais”. A primeira resposta escrita do par Dália-Isabel (Figura 5.13) apenas evidencia uma estratégia algébrica mas iniciaram por uma resolução de tentativa-erro que foi apagada. A exploração áudio desta resposta não está em condições uma vez que as alunas não se sentiram muito à vontade no início do trabalho. Contudo, o par equaciona corretamente a situação mas algumas evidências mostram que não têm total compreensão sobre os símbolos e sobre os manuseamentos algébricos. Na segunda linha evidenciam, corretamente, o princípio de equivalência utilizado. Na terceira linha escrevem o mesmo mas com o termo na variável y anulado do primeiro membro da equação. E só em seguida é que aplicam novamente os princípios de equivalência. Contudo, o cálculo não é feito corretamente $\left(\frac{2x}{2}=0\right)$ e a incógnita x (preço do elefante), *não definida na resolução*, desaparece da equação. Algo que não fazia sentido. Desta forma, responderam que não era possível, sem equacionar um possível erro de cálculo. A questão seguinte não foi respondida por este par de alunas, a gravação áudio do trabalho a pares mostrou *incompreensão com a “forma algébrica”.*

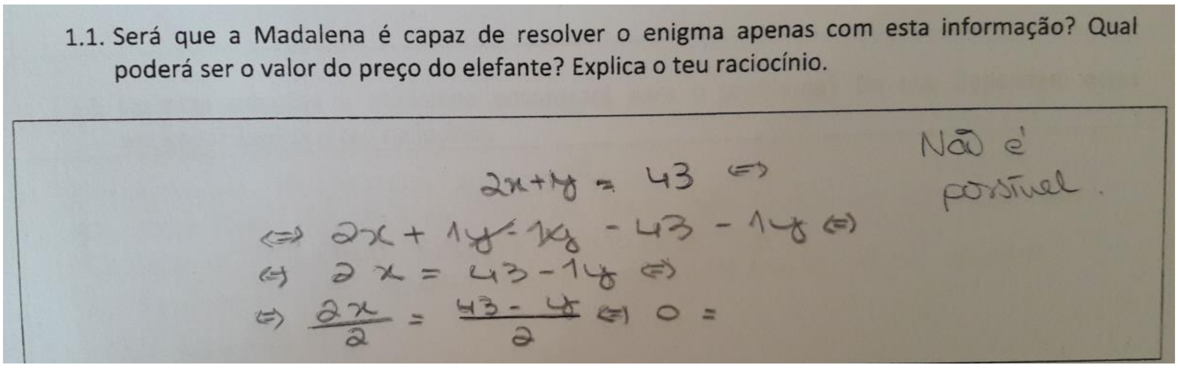
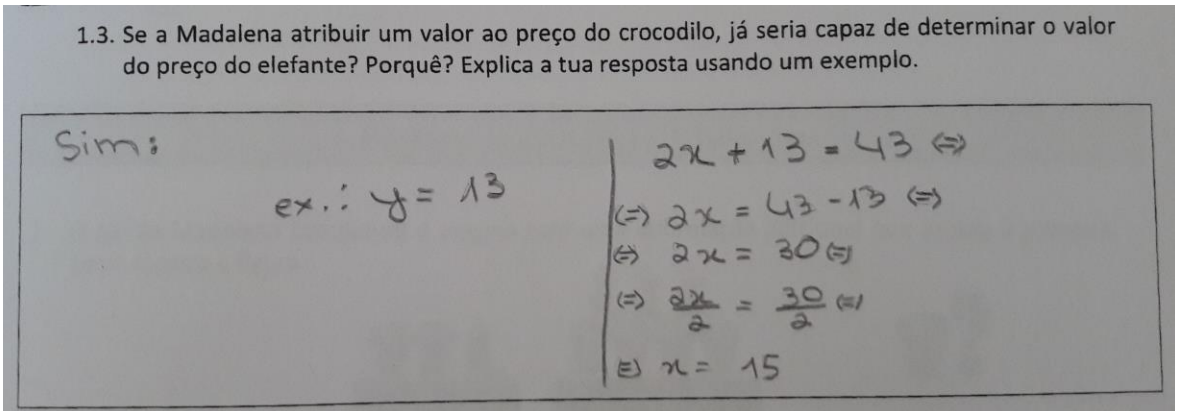


Figura 5.13 - Resposta do par Dália-Isabel à questão 1.1 da tarefa 1

A análise conjunta permite inferir que este par de aluna não desenvolveu o manuseamento algébrico com compreensão. Apesar de terem a noção da simbologia, alguns erros de cálculo foram impeditivos de alcançar a resposta com sucesso. A concretização falhada levou-as a repensar a estratégia, acreditando na potencialidade de simbologia algébrica para resolver o problema. O contexto e a falta de uma resposta única foi uma dificuldade acrescida pois na questão 1.3 (Figura 5.14), em que há apenas uma incógnita, evidenciando domínio sobre a estrutura algébrica e o manuseamento é feito com sucesso.



1.3. Se a Madalena atribuir um valor ao preço do crocodilo, já seria capaz de determinar o valor do preço do elefante? Porquê? Explica a tua resposta usando um exemplo.

Sim:

ex.: $y = 13$

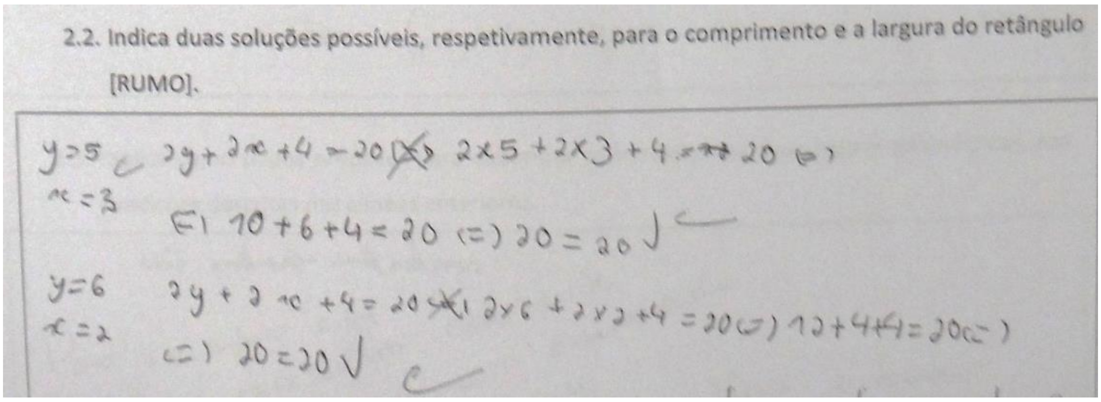
$2x + 13 = 43 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 43 - 13 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{30}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 15$

Figura 5.14 - Resposta do par Dália-Isabel à questão 1.3 da tarefa 1

Do acima exposto pode-se concluir que a simbologia algébrica não acrescenta dificuldades ao manuseamento algébrico mas sim a *existência de duas incógnitas*, aspeto que será analisado na subcategoria sentido de variável.

Identificação de equações equivalentes

O par Paulo-Tomás, apesar de evidenciar algum domínio sobre o manuseamento algébrico e de traduzir corretamente o problema para linguagem algébrica, ou seja, evidenciam sentido de símbolo mas nem sempre interpretam corretamente o significado de todos os símbolos. No caso concreto (Figura 5.15) utilizam o símbolo de equivalente entre a expressão geral que traduz o problema e os casos particulares que consideram (na primeira linha de cada solução indicada). Nos restantes passos o sinal é interpretado corretamente. Este erro é recorrente na maioria dos alunos. Apenas alguns estão despertos à correta utilização deste símbolo que, para eles, se assemelha a um detalhe.



2.2. Indica duas soluções possíveis, respetivamente, para o comprimento e a largura do retângulo [RUMO].

$y = 5$, $x = 3$: $2y + 2x + 4 = 20 \Leftrightarrow 2\times5 + 2\times3 + 4 = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10 + 6 + 4 = 20 \Leftrightarrow 20 = 20$ ✓

$y = 6$, $x = 2$: $2y + 2x + 4 = 20 \Leftrightarrow 2\times6 + 2\times2 + 4 = 20 \Leftrightarrow 12 + 4 + 4 = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20 = 20$ ✓

Figura 5.15 - Resolução do par Paulo-Tomás à questão 2.2 da Tarefa 2 da Ficha "Aplico o que aprendi – 1"

Visão global com significado

Os alunos caem, por vezes, em manuseamentos sem significado face ao objetivo que é dar resposta ao problema. A necessidade de efetuar cálculos em busca de uma resposta é muitas vezes ó único objetivo dos alunos. Um exemplo desta situação é resolução do par Dália-Isabel (Figura 5.16) que executam manipulações algébricas mentalmente, sem evidência da estratégia escolhida e sem indicação dos valores de *x* e de *y* considerados. Neste caso não respondem ao problema com os valores do comprimento e da largura do retângulo [RUMO] mas apenas com os valores das incógnitas, necessários aos primeiros. Perdem, assim, a visão global do problema.

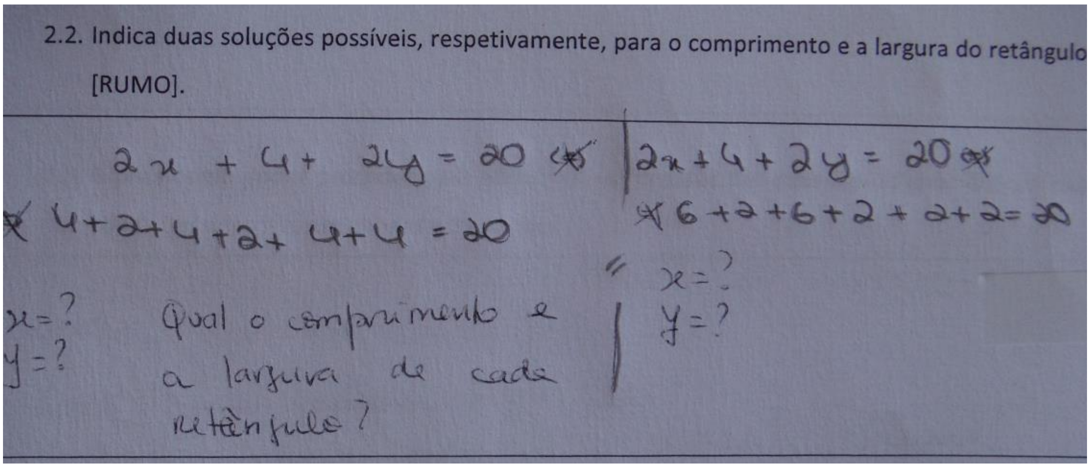


Figura 5.16 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 2.2 da Tarefa 2 da Ficha "Aplico o que aprendi – 1"

Síntese

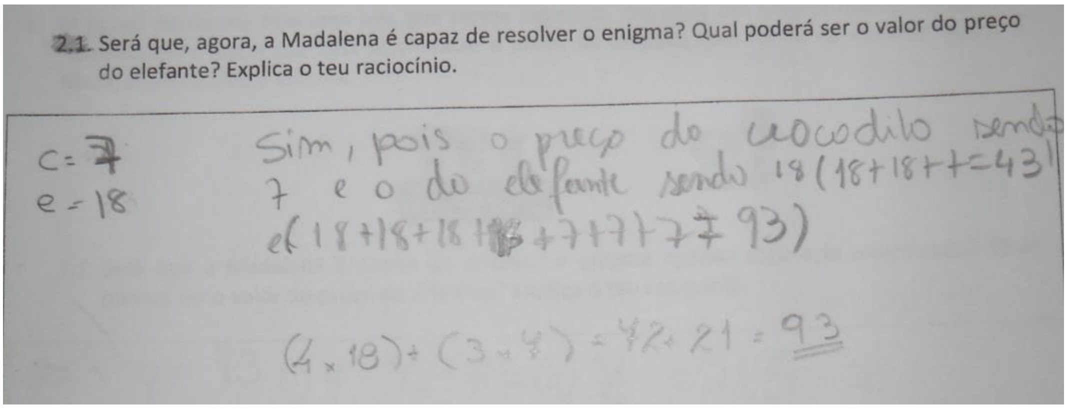
Os alunos revelaram ter sentido de símbolo e o formalismo do método de substituição é a principal dificuldade. A intuição na utilização dos símbolos algébricos e a visão global com significado não são fatores comuns a todos os alunos. A escrita formal com recurso à simbologia algébrica é por vezes de difícil concretização, verificando-se uma utilização de uma linguagem pré-formal em muitas resoluções e, até mesmo, de uma linguagem própria.

Sentido de Variável

Não esquecendo que a maior diferença entre a Aritmética e a Álgebra reside no modo como são utilizadas as letras na representação de quantidades numéricas, importa considerar o sentido de variável na resolução de situações problemática. Desta forma, optei por analisar esta subcategoria em função da utilização que dela é feita, à semelhança da classificação apresentada por Ursini e Trigueros (2011).

Número Generalizado

As tarefas referidas não permitem avaliar a compreensão deste desempenho da forma pretendida. Contudo, em algumas situações os alunos recorreram a uma estratégia de tentativa-erro, como foi o caso do par Carla-Bruno (Figura 5.17). As tentativas falhadas não estão na folha de registo mas em folha à parte. Esta estratégia utiliza a quantidade como um número generalizado que vai tomando várias concretizações até que a solução seja alcançada.


2.1. Será que, agora, a Madalena é capaz de resolver o enigma? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

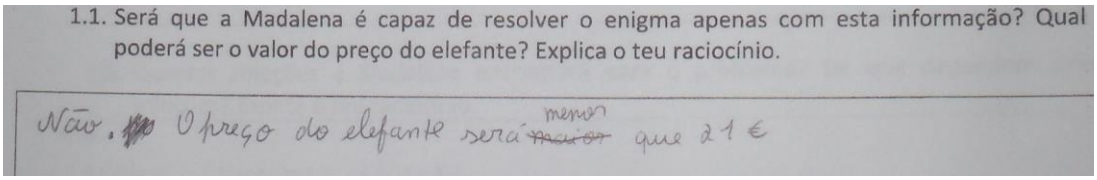
c = 7
e = 18

Sim, pois o preço do crocodilo sendo 7 e o do elefante sendo 18 (18+18+7+7=43) e (18+18+18+18+7+7+7 93)

(4 × 18) + (3 × 7) = 72 + 21 = 93

Figura 5.17 - Resposta do par Carla-Bruno à questão 2.1 da tarefa "Compreendo equações literais"

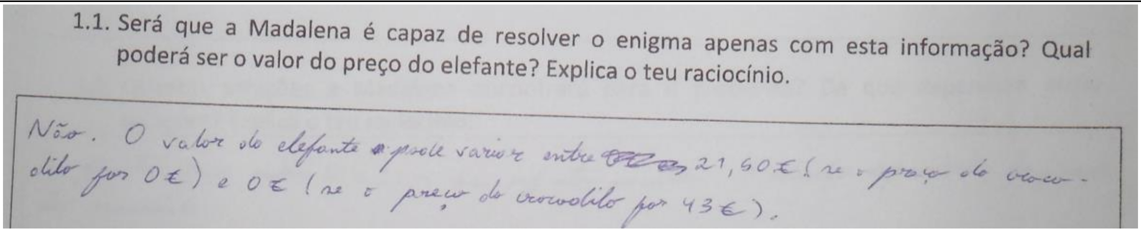
Na questão em que se solicita que atentem à relação entre as quantidades desconhecidas, o par Marília-Gabriel atribuiu um valor máximo ao peluche elefante sem explicar o raciocínio desenvolvido para o peluche crocodilo (Figura 5.18).


1.1. Será que a Madalena é capaz de resolver o enigma apenas com esta informação? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

Não. O preço do elefante será ~~maior~~ menor que 21 €

Figura 5.18 - Resposta do par Marília-Gabriel à questão 1.1 da tarefa 1

A atribuição de uma situação concreta, a não utilização da simbologia algébrica ou funcional atribuem à letra um papel de número generalizado. De forma semelhante responde o par Fernando-Diana (Figura 5.19) em que anulam o preço de um dos animais (custo associado € 0) e indicam a variação possível para o preço. A *resposta* insere-se num contexto matemático *sem exploração do ponto de vista do contexto* mas sem utilização da simbologia algébrica ou da identificação da relação precisa entre as duas variáveis. A concretização dos valores insere-se na utilização da letra como um número generalizado.


1.1. Será que a Madalena é capaz de resolver o enigma apenas com esta informação? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

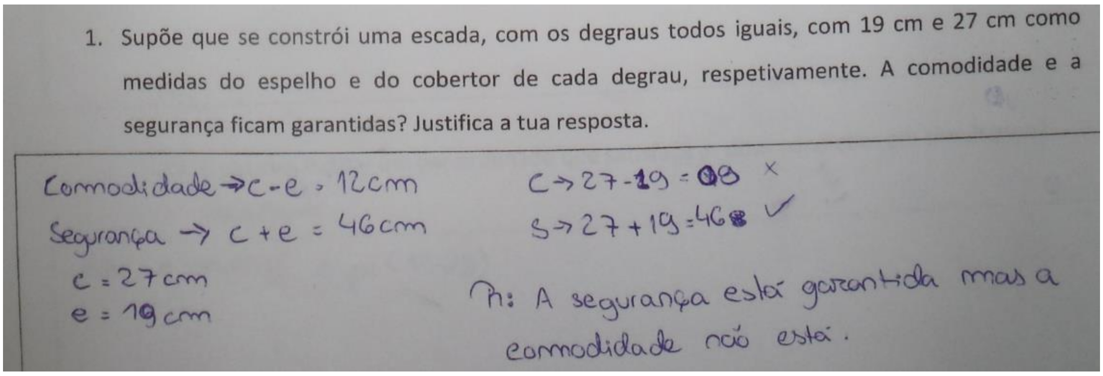
Não. O valor do elefante pode variar entre 21,60€ (se o preço do crocodilo for 0€) e 0€ (se o preço do crocodilo for 43€).

Resposta Fernando-Diana: "Não. *O valor do elefante pode variar entre 21,60 € (se o preço do crocodilo for 0 €) e 0 € (se o preço do crocodilo for 43 €)*".

Figura 5.19 - Resposta do par Fernando-Diana à questão 1.1 da tarefa 1

Incógnita

A maioria dos alunos respondeu corretamente às questões feitas em que a variável já está definida. A capacidade de substituir as incógnitas por um ou mais valores que transformem as equações em proposições verdadeiras foi do domínio dos alunos. A *formalização das respostas* é que apresenta uma maior diversidade e, por vezes, é uma dificuldade. O par Isadora-Rui, que mostram elevado domínio na compreensão da simbologia algébrica, evidenciado pela organização da resposta quando é pedido que procedam à substituição de valores (Figura 5.20). Contudo não evidenciem explicitamente as proposições verdadeira e falsa a que chegaram. Em vez disso, utilizam uma cruz para a proposição falsa e um visto para a verdadeira.


1. Supõe que se constrói uma escada, com os degraus todos iguais, com 19 cm e 27 cm como medidas do espelho e do cobertor de cada degrau, respetivamente. A comodidade e a segurança ficam garantidas? Justifica a tua resposta.

Comodidade → c - e = 12cm

Segurança → c + e = 46cm

c = 27cm

e = 19cm

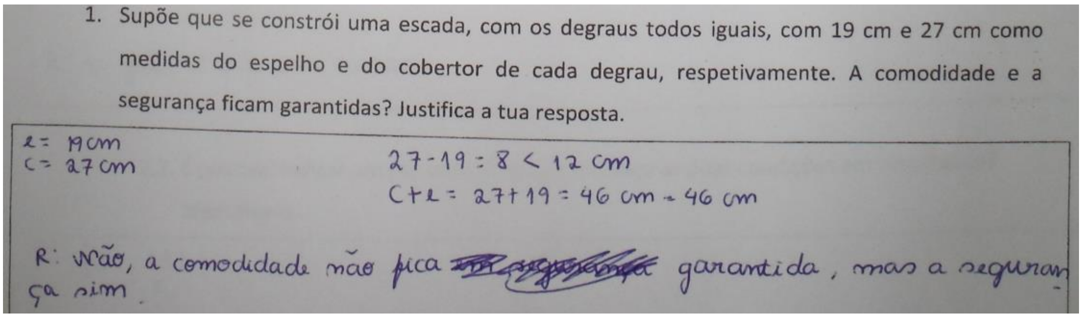
C → 27 - 19 = 08 ×

S → 27 + 19 = 46 ✓

R: A segurança está garantida mas a comodidade não está.

Figura 5.20 - Resolução do par Isadora-Rui à questão 1.1 da Tarefa “Planear Escadas com a Matemática”

De forma idêntica responde o par Simone-Mário (Figura 5.21), contudo evidenciam as proposições verdadeiras com simbologia adequada mas sem a utilização do sinal de equivalente no caso da segunda equação, atribuindo um sentido de operação ao sinal de igual, apesar de escrever igualdades verdadeiras.


1. Supõe que se constrói uma escada, com os degraus todos iguais, com 19 cm e 27 cm como medidas do espelho e do cobertor de cada degrau, respetivamente. A comodidade e a segurança ficam garantidas? Justifica a tua resposta.

e = 19cm

c = 27cm

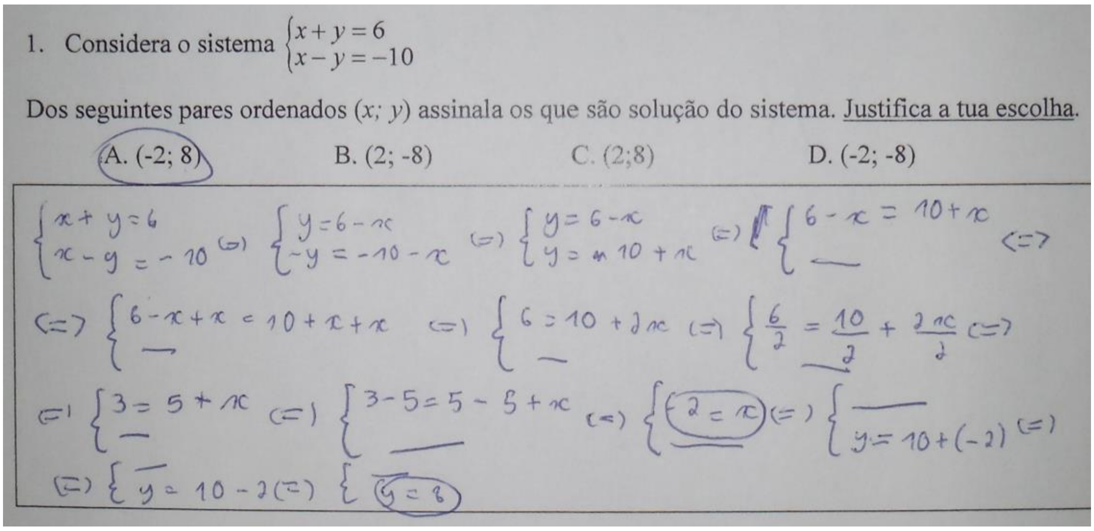
27 - 19 = 8 < 12 cm

c + e = 27 + 19 = 46 cm = 46 cm

R: Não, a comodidade não fica ~~segurança~~ garantida, mas a segurança sim.

Figura 5.21 - Resolução do par Simone-Mário à questão 1.1 da Tarefa “Planear Escadas com a Matemática”

Em alternativa à substituição dos valores das incógnitas, para descobrir a solução ao problema, está a resolução algébrica do sistema e assim a identificação direta do par ordenado que corresponde à solução. Como exemplo desta situação apresento a resolução do par Tomás-Paulo (Figura 5.22) em que usam o método de substituição para encontrar a opção correta.



1. Considera o sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-10 \end{cases}$

Dos seguintes pares ordenados $(x; y)$ assinala os que são solução do sistema. Justifica a tua escolha.

A. (-2; 8) B. (2; -8) C. (2;8) D. (-2; -8)

$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ -y=-10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-x \\ y=10+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x=10+x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$

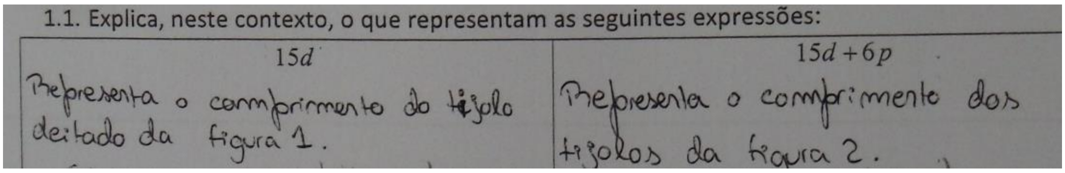
$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x+x=10+x+x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=10+2x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{2}=\frac{10}{2}+\frac{2x}{2} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=5+x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-5=5-5+x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=x \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y=10+(-2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y=10-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y=8 \end{cases}$

Figura 5.22 - Resolução do par Tomás-Paulo à questão 1 da Tarefa “Aplico o que aprendi -3”.

Nas situações descritas, a correta substituição dos valores indicados sugere a compreensão do significado das incógnitas consideradas no contexto. O mesmo não aconteceu à identificação das expressões solicitadas na tarefa “O Muro da D. Rosa” em relação à equação dada para o comprimento do muro: $c = 15d + 6p$. Nesta tarefa as incógnitas d e p não estavam definidas explicitamente, o que se revelou uma dificuldade acrescida para alguns alunos. O par Isadora-Rui (Figura 5.23) relatou, na entrevista, as dificuldades na interpretação dos significados quando conjugou a expressão algébrica com os dados das figuras 1 e 2 (Anexo III).



1.1. Explica, neste contexto, o que representam as seguintes expressões:

$15d$	$15d+6p$
Representa o comprimento do tijolo deitado da figura 1.	Representa o comprimento dos tijolos da figura 2.

Figura 5.23 - Resolução do par Isadora-Rui à questão 1.1 da Tarefa “O Muro da D. Rosa”

No início da entrevista, o par assume a dificuldade sentida (fala 2) e mostra como a ultrapassou (fala 4).

1. **Professora**: Em relação a esta tarefa houve alguma dificuldade ao ler o enunciado ou a responder às questões?
2. **Isadora**: Nós no início, quando vimos a expressão 15*d* + 6*p*, não percebemos muito bem o que era o *d* e o *p* mas depois chegámos lá e percebemos que era deitado e em pé.
3. **Professora**: Porquê? O que que vos fez perceber?
4. **Rui:** Pelas distâncias basicamente. Sendo a altura 6 se estiver deitado, ocupa 15 e se estiver em pé ocupa 6, ou seja, 15 deitado mais 6 em pé…

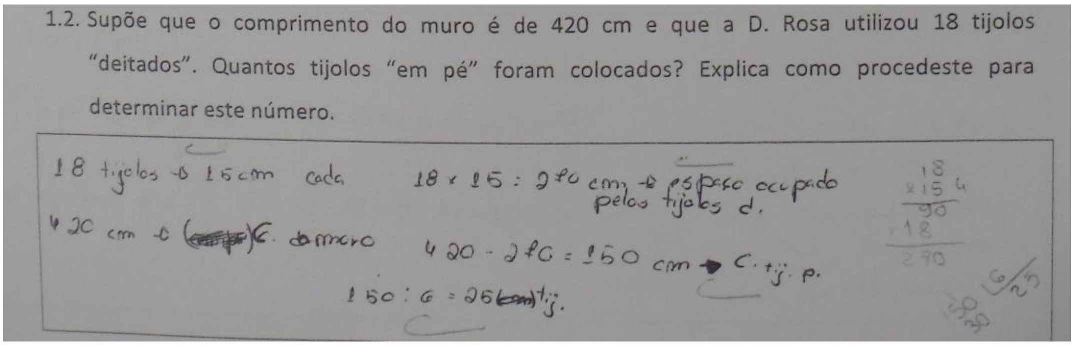
Mas a continuação do meu questionamento sobre a incógnita *d* (falas 5, 7, 9 e 12) mostra que se referiam a um tijolo como o esquema da figura 1 (falas 8 e 11).

5. **Professora**: Então e só pensando no *d*, o que é que representa?
6. **Par**: …. [não compreenderam a pergunta]
7. **Professora**: Um número? Um comprimento?
8. **Isadora**: Um comprimento…. [muito insegura]
9. **Professora**: O comprimento de um tijolo…?
10. **Isadora**: Sim…. [muito insegura]
11. **Rui:** Basicamente é a posição do tijolo, se está deitado ou se está em pé.
12. **Professora**: Mas olhando para esta parcela e para a vossa resposta escrita '*representa o comprimento do tijolo deitado da figura 1*', vocês referem-se ao comprimento de apenas um tijolo?
13. **Rui:** Sim.

Com base na figura, tentei promover uma generalização (fala 14) a fim de alcançar a expressão geral e a compreensão do significado da incógnita *d*. Compreendi que o par de alunos estava a atribuir à letra *d* apenas a indicação da posição e não a quantidade de tijolos (fala 15), acrescentava-se a letra *d* assim como se acrescentam o m quando de pretende indicar que se mede um comprimento utilizando a unidade de medida metro. Desta forma, questionei-os da mesma forma mas em vez de *d* e *p* usei *x* e *y* (falas 16 e 22) e assim o significado atribuído já foi o que se pretendia alcançar (falas 17, 21 e 23). A dificuldade foi a *interpretação da figura*.

14. **Professora**: Então e se eu tivesse dois tijolos?
15. **Isadora**: Seria $2\times15\times d$.
16. **Professora**: [repeti vagarosamente a resposta da Inês que balançou na sua resposta mas não quis acrescentar mais nada] Então e se em vez de $15d$ tivessem $15x$?
17. **Isadora**: Pois é isso que eu ia a dizer… Não era $2\times15\times d$ mas 15×2 [no caso dos dois tijolos deitados].
18. **Professora**: Então o *d* significa….
19. **Isadora**: O *d* significa um, neste caso…. [apontando para a figura 1]
20. **Rui:** Significava um, se calhar... [acompanhando a Inês]
21. **Isadora**: O *d* é como se fosse um *x*… como uma variável, acho eu.
22. **Professora**: E o *p*?
23. **Isadora**: O *p* também…. É como se fosse o *y*.

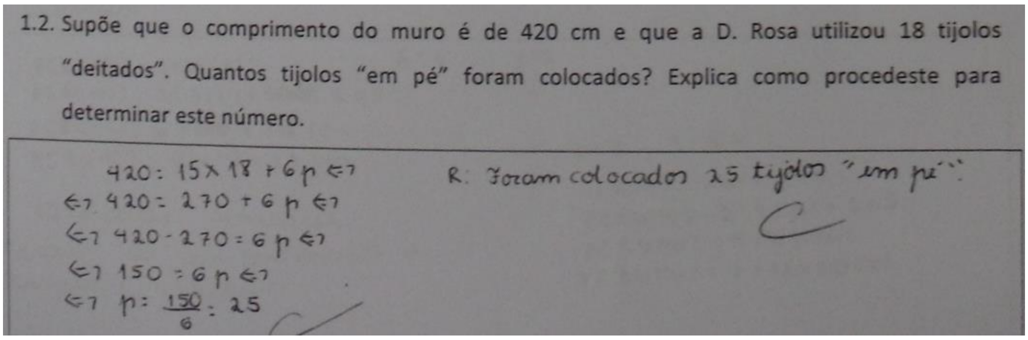
Na questão 1.2 (Figura 5.24), a única quantidade desconhecida era *p*, cujo significado era facilmente compreensível que seria o número de tijolos deitados. Recorreram ao método aritmético de desfazer (*undoing*) para a resolução, identificando os significados dos valores obtidos.


1.2. Supõe que o comprimento do muro é de 420 cm e que a D. Rosa utilizou 18 tijolos "deitados". Quantos tijolos "em pé" foram colocados? Explica como procedeste para determinar este número.

18 tijolos → 15 cm cada
18 × 15 : 270 cm → espaço ocupado pelos tijolos d.
420 cm → c. do muro
420 − 270 = 150 cm → c. tij. p.
150 : 6 = 25 tij.

Figura 5.24 - Resolução do par Isadora-Rui à questão 1.2 da Tarefa "O Muro da D. Rosa"

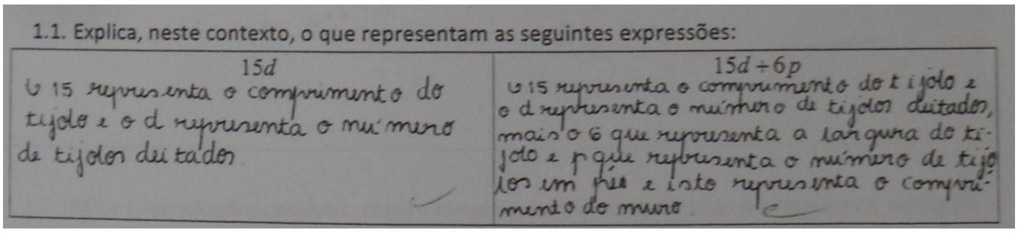
A maioria dos alunos não teve dificuldade em resolver esta questão mas foram poucos os que mobilizaram corretamente a *formalização algébrica* como evidencia o par Simone-Mário (Figura 5.25). Os alunos atribuem os significados corretos à simbologia algébrica, estando em concordância com os significados atribuídos às incógnitas *d* e *p* na questão 1.1 (Figura 5.26); evidenciando sentido de variável.


1.2. Supõe que o comprimento do muro é de 420 cm e que a D. Rosa utilizou 18 tijolos "deitados". Quantos tijolos "em pé" foram colocados? Explica como procedeste para determinar este número.

$420 = 15 \times 18 + 6p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 420 = 270 + 6p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 420 - 270 = 6p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 150 = 6p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p = \frac{150}{6} = 25$

R: Foram colocados 25 tijolos "em pé".

Figura 5.25 - Resolução do par Simone-Mário à questão 1.2 da Tarefa "O Muro da D. Rosa"


1.1. Explica, neste contexto, o que representam as seguintes expressões:

$15d$	$15d+6p$
O 15 representa o comprimento do tijolo e o d representa o número de tijolos deitados	O 15 representa o comprimento do tijolo e o d representa o número de tijolos deitados, mais o 6 que representa a largura do tijolo e p que representa o número de tijolos em pé e isto representa o comprimento do muro.

Figura 5.26 - Resolução do par Simone-Mário à questão 1.1 da Tarefa "O Muro da D. Rosa"

Variável numa Relação Funcional

O par Isadora-Rui mobiliza conhecimentos aprendidos no estudo das funções (Figura 5.27) evidenciando conhecimento das variáveis independente e dependente relacionando $y = f(x) = ax + b$. Distingue corretamente as duas funções, designando a prestação da Rita por $f(x)$ e a do Gustavo por $g(x)$. Expressa na forma algébrica relacionando corretamente as quantidades, mobilizando a expressão para o declive e considera dois pontos de coordenadas conhecidas para determinar a ordenada da origem mobilizando os dados dados em linguagem natural.

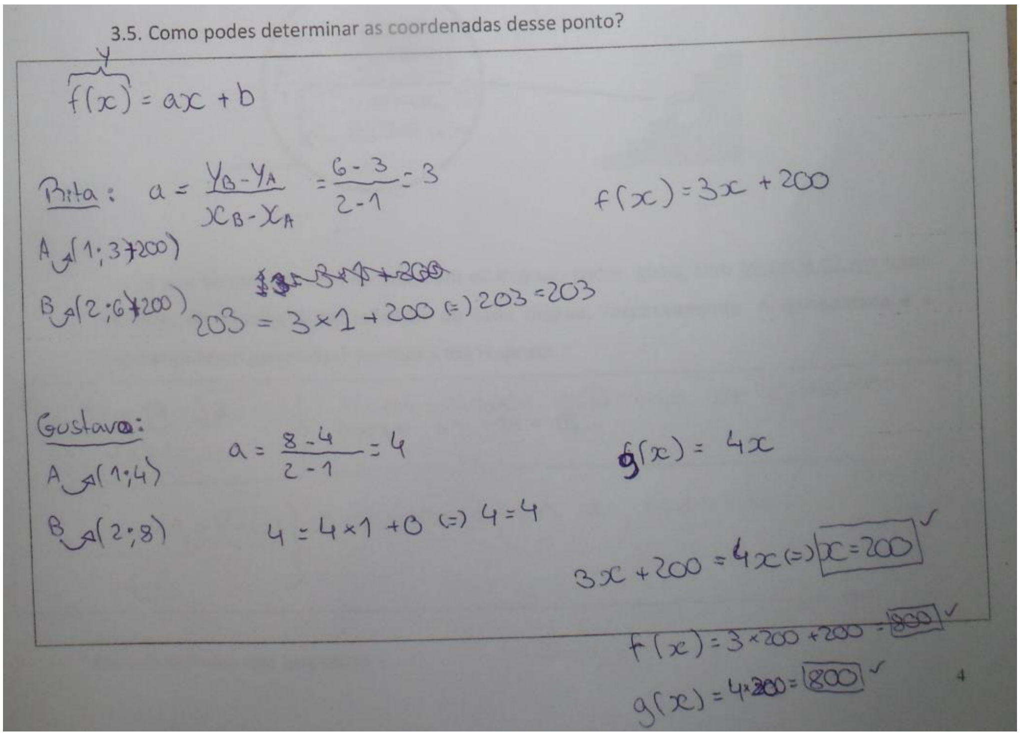


Figura 5.27 - Resolução do par Isadora-Rui à questão 1.1 da Tarefa “Prova de Atletismo”

O par Simone-Mário, por sua vez, identifica as coordenadas do ponto E com base na leitura do gráfico (Figura 5.28). No decurso da aula questiono-os quanto à certeza transmitida na resposta, que foi posta em causa durante a discussão da aula (conforme registo áudio). Por iniciativa própria, revêm todas as respostas dadas dando maior peso à informação transmitida em linguagem natural. Mobilizam conhecimentos anteriores para ter acesso à expressão geral de cada uma das funções dadas, objetivando a certeza a ter nas coordenadas do ponto E.

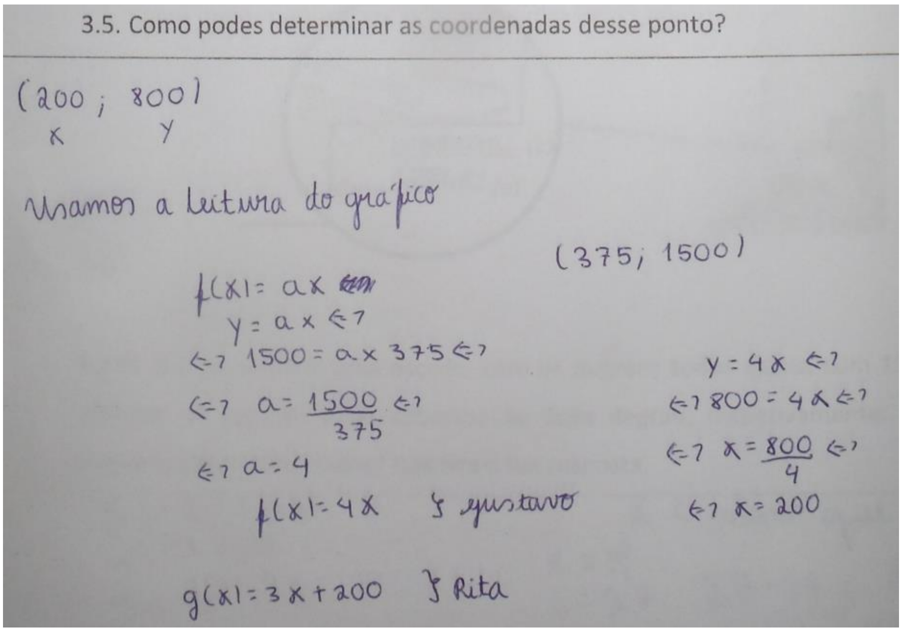


Figura 5.28 - Resolução do par Simone-Mário à questão 1.5 da Tarefa “Prova de Atletismo”

Apesar de verificar que a maioria optou pela leitura do gráfico como estratégia, posso inferir que compreendem o sentido de variável quando está numa relação funcional e compreendem as transformações dos sistemas de representação gráfica e algébrica. Contudo existem lacunas na *formalização da linguagem algébrica*.

Síntese

Em suma os alunos mostraram um sentido de variável bem desenvolvido. Contudo, apresentam dificuldades na atribuição de significado à incógnita quando esta não está definida explicitamente no enunciado.

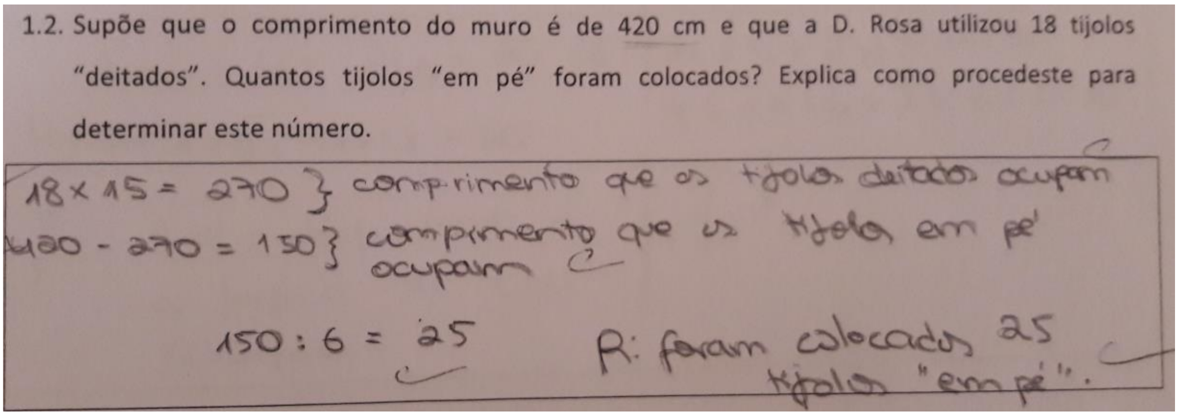
Sistemas de Representação

Nesta categoria são consideradas para análise os (*i*) tipos representações usadas pelos alunos nas tarefas propostas e a (*ii*) representação preferencial face ao contexto da proposta pedagógica elaborada.

Tipos de representações

Sistema de Representação do tipo Verbal/Sintático

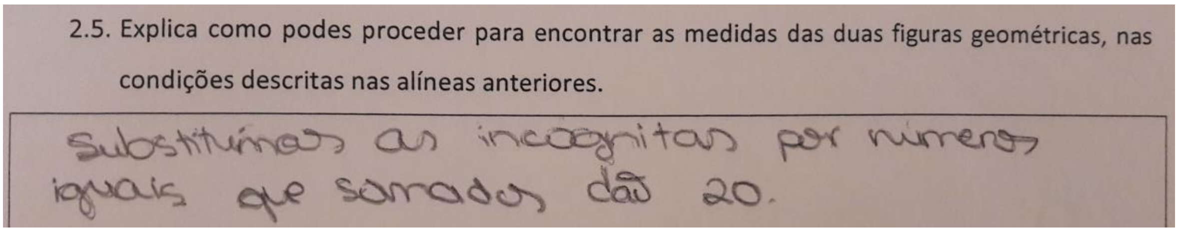
A linguagem natural é muito usada pelos alunos como complemento de outra representação: para reforçar o que foi dito em linguagem simbólica e, frequentemente, para enquadrar a resposta matemática obtida face ao contexto. O par Dália-Isabel (Figura 5.29) usa chavetas e texto para justificar cada cálculo e, no final, identificam a resposta cujo resultado não foi acompanhado de esclarecimento.


1.2. Supõe que o comprimento do muro é de 420 cm e que a D. Rosa utilizou 18 tijolos "deitados". Quantos tijolos "em pé" foram colocados? Explica como procedeste para determinar este número.

18 × 15 = 270 } comprimento que os tijolos deitados ocupam
420 - 270 = 150 } comprimento que os tijolos em pé ocupam
150 : 6 = 25
R: foram colocados 25 tijolos "em pé".

Figura 5.29 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 1.2 da Tarefa "O Muro da D. Rosa"

Por vezes, a representação verbal é usada para substituir os cálculos e explicar o que deveriam fazer, sem chegar a nenhuma conclusão objetiva. É o caso do par Dália-Isabel que explicam o procedimento matemático a fazer em vez de o fazer (Figura 5.30).


2.5. Explica como podes proceder para encontrar as medidas das duas figuras geométricas, nas condições descritas nas alíneas anteriores.

Substituímos as incognitas por números iguais que somados dão 20.

Figura 5.30 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 1.21 da Tarefa
"Figuras Geométricas"

Neste caso posso inferir que a resposta corresponde à explicação solicitada no enunciado. Comparando as restantes respostas, verifico que existem outras idênticas, outras recorrem a estratégias algébricas e, ainda, algumas por responder.

Sistema de Representação do tipo Pictórico

Apesar de muitas vezes incentivados na utilização de esquemas, principalmente em contextos geométricos, os alunos não recorrem muitas vezes a este tipo de representação. Durante a intervenção letiva, propus a um dos pares que usasse este tipo de representação (Figura 5.31) para ultrapassar as dificuldades de forma autónoma e, em seguida, tentar resolver por métodos algébricos. A segunda meta não foi alcançada mas a primeira foi e com sucesso. O par recorreu à estratégia tentativa-erro por meio de esquemas, registando a solução correta na folha da tarefa (apesar de eu ter solicitado a transcrição para a folha de registo). Os esquemas foram importantes para que, de forma autónoma, conseguissem ultrapassar parte das dificuldades e para aumentar a autoconfiança no desempenho.

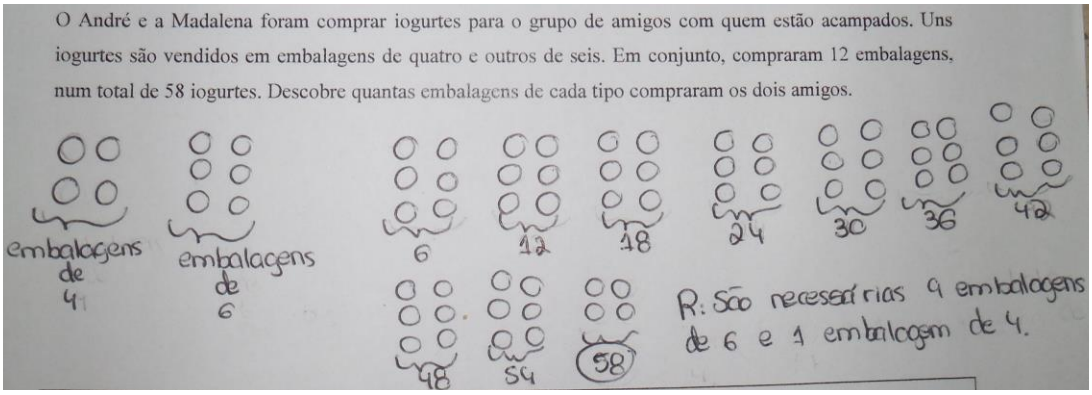


Figura 5.31 - Resolução do par Josefina-Nelson à Tarefa “Os Iogurtes para o Acampamento”

Este tipo de representação também é usado para esquematizar os dados do enunciado. O par Marília-Gabriel mostraram (Figura 5.32) necessidade de indicar no esquema, copiado do enunciado, os valores dados para cada uma das incógnitas. A visualização dos dados dá uma outra visão do problema, permitindo a continuação dos cálculos algébricos, como sucedido.

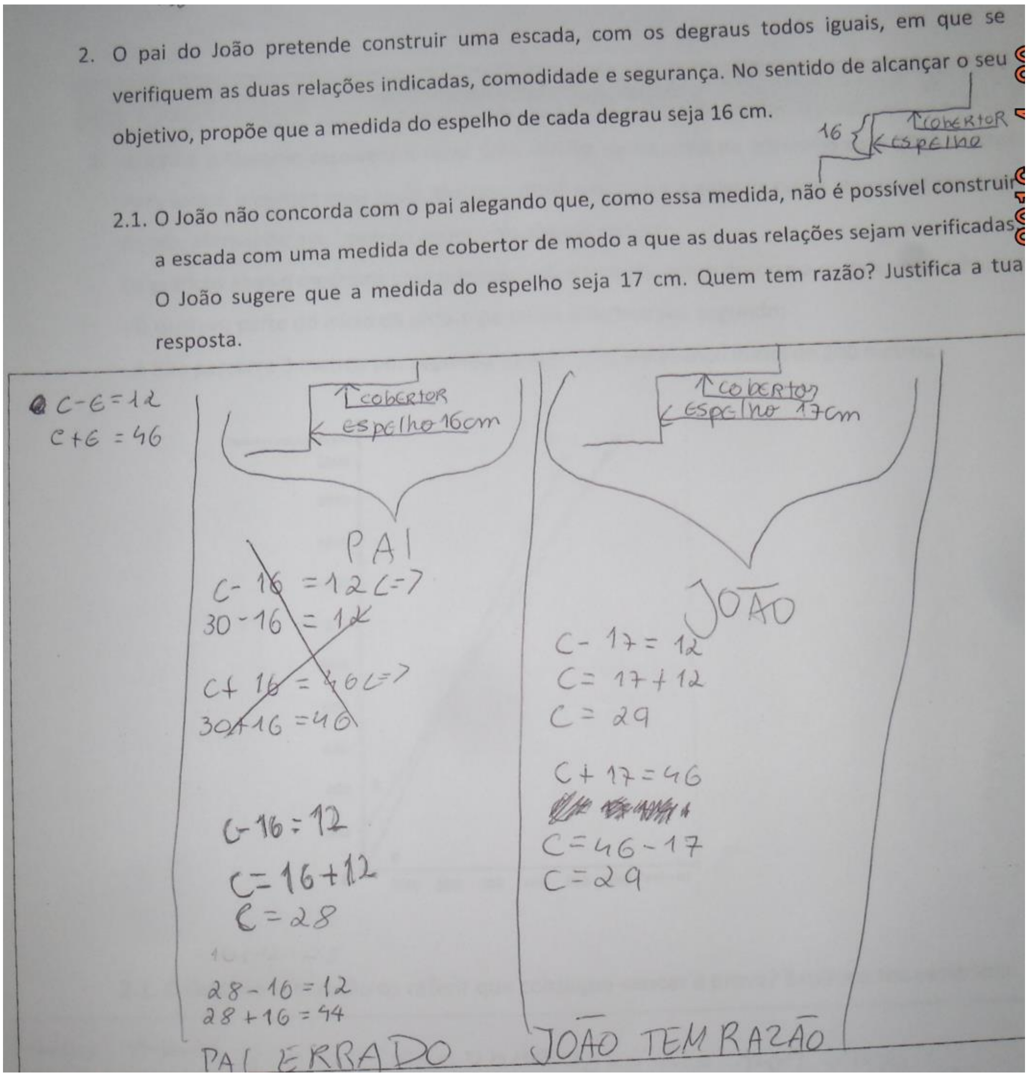


Figura 5.32 - Resolução do par Marília-Gabriel à questão 2.1 da Tarefa “Planear Escadas com a Matemática”

Esta representação pode facilitar os cálculos algébricos, como a utilização da árvore da adição utilizada pelo par Bruno-Carla (Figura 5.33).

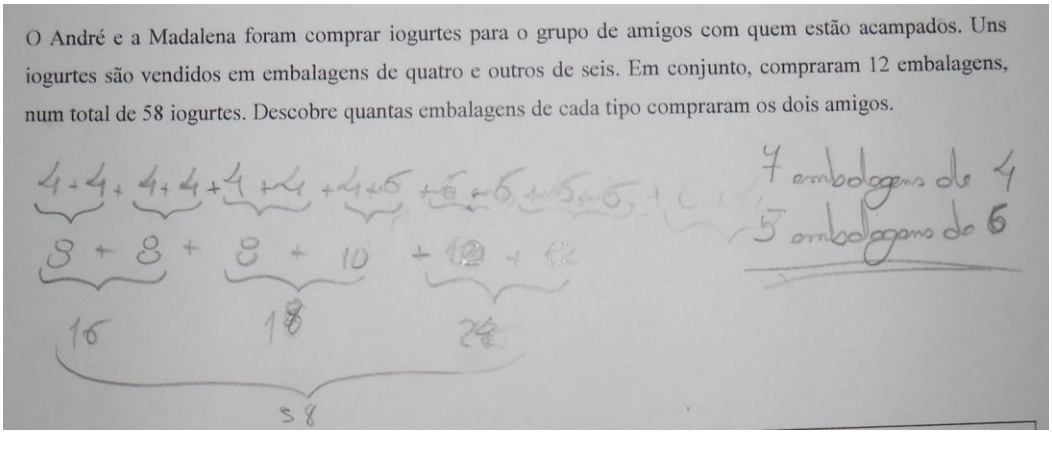
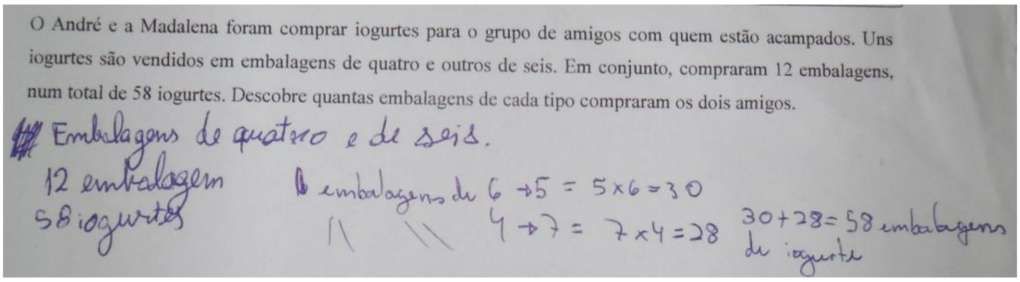


Figura 5.33 - Resolução do par Carla-Bruno à Tarefa “Os Iogurtes para o Acampamento”

Sistema de Representação do tipo Aritmético

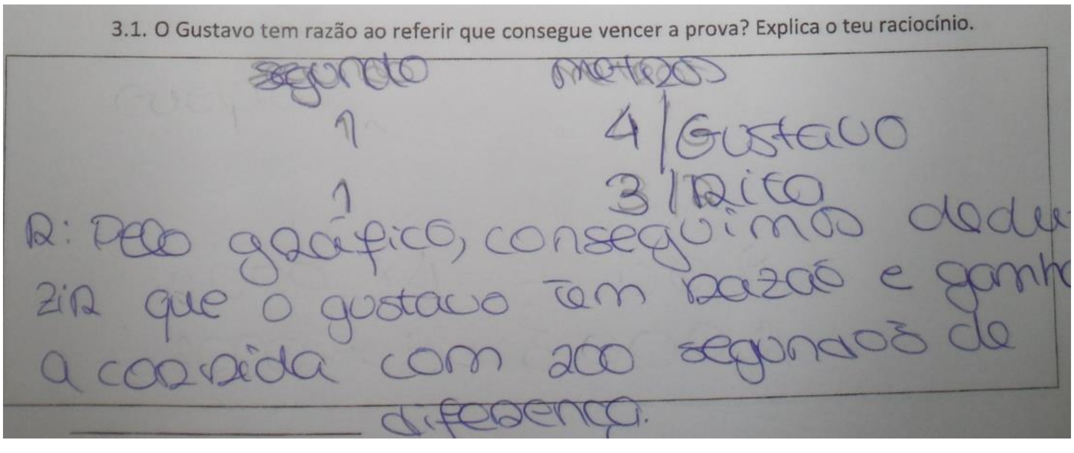
A estratégia tentativa-erro, experimentando para casos concretos, é um exemplo de aplicação deste tipo de representação. Alguns alunos recorrem a esta estratégia, como é o caso do par Rodrigo-António (Figura 5.34) com a concretização das incógnitas numa única solução, não procurando outra estratégia de resolução. As tentativas falhadas não foram registadas na folha da tarefa.


O André e a Madalena foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois amigos.

Embalagens de quatro e de seis.
12 embalagem
58 iogurtes
embalagens de 6 → 5 = 5×6=30
4 → 7 = 7×4=28
30+28=58 embalagens de iogurte

Figura 5.34 - Resolução do par Rodrigo-António à Tarefa "Os Iogurtes para o Acampamento".

As tabelas são outra forma de representação do tipo aritmético, usada pelos alunos quando a quantidade desconhecida desempenha o papel de variável numa relação funcional. O par Teresa-Leonardo utilizou as tabelas, primeiro, para organização da informação dada no enunciado (Figuras 5.35) e, depois, para armazenar nova informação retirada da representação gráfica (Figura 5.36). Em ambos os casos a representação tabelar foi complementada pela representação verbal para conclusão/resposta ao problema.


3.1. O Gustavo tem razão ao referir que consegue vencer a prova? Explica o teu raciocínio.

segundo	metros	
1	4	Gustavo
1	3	Rico

R: Pelo gráfico, conseguimos dedu
zir que o gustavo tem razão e ganh
a corrida com 200 segundos de
diferença.

Figura 5.35 - Resolução do par Teresa-Leonardo da questão 3.1 da Tarefa "Prova de Atletismo"

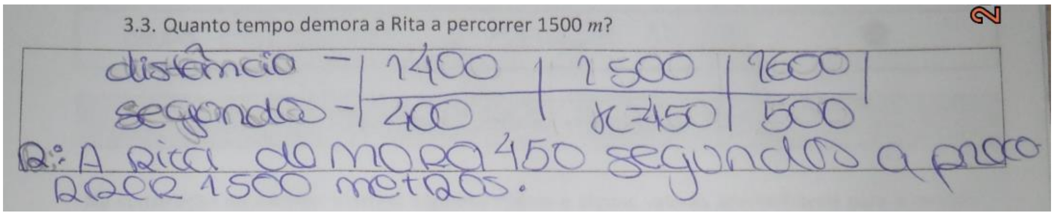


Figura 5.36 - Resolução do par Teresa-Leonardo da questão 3.3 da Tarefa “Prova de Atletismo”

Sistema de Representação do tipo Gráfico

Papel e lápis

As tarefas elaboradas não me permitem fazer uma análise adequada sobre as dificuldades na elaboração de gráficos com papel e lápis.

Calculadora Gráfica

A utilização da calculadora gráfica foi considerada para obtenção de rigor e de rapidez nas respostas dos alunos, conferindo uma análise não enviesada dos resultados.

Manuseamento da calculadora gráfica

Com o objetivo de analisar o manuseamento com a calculadora gráfica recolhi as respostas do questionário anónimo, agrupei- as em categorias e apresentei-as num gráfico radial (Figura 5.37) para facilitar a visualização.

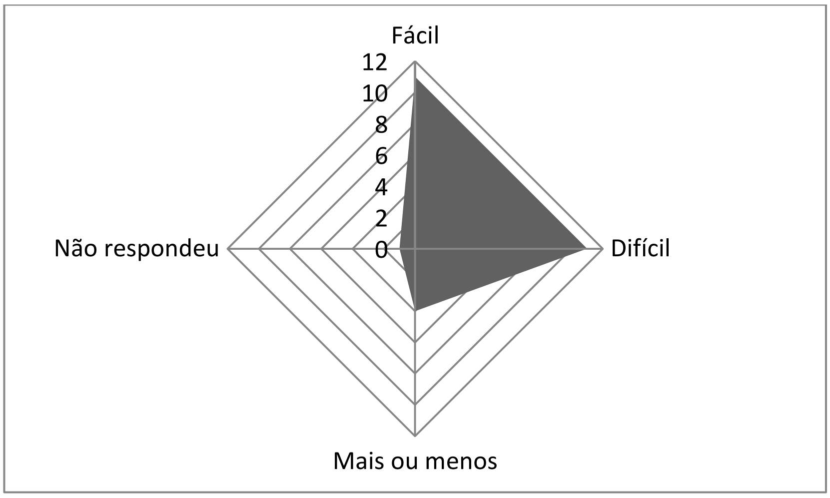


Figura 5.37 - Manuseamento da calculadora gráfica

Os alunos que manifestaram facilidade em trabalhar com a calculadora gráfica foram em igual número, 11, aos que manifestaram dificuldade. Uma minoria sentiu alguma dificuldade e 1 aluno não respondeu a esta questão, portanto não se pode dizer que a calculadora tenha sido um obstáculo para a maioria dos alunos. Estes resultados obtidos vão ao encontro do que observei em aula uma vez que vários alunos dependiam da ajuda do professor para avançar com as tarefas que recorriam a este recurso e outros tantos trabalharam de forma independente. Alguns alunos manifestaram não gostar deste recurso e outros perguntavam constantemente as teclas para os comandos necessários. No sentido de analisar a principal razão atribuída à dificuldade no manuseamento deste recurso, recolhi as respostas ao inquérito, agrupei-as e representei-as num gráfico radial (Figura 5.38).

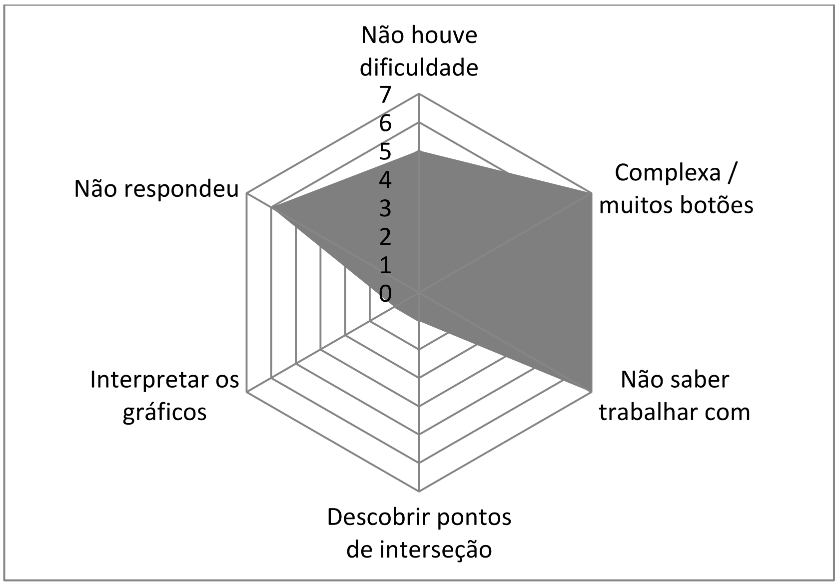


Figura 5.38 - Principal dificuldade no manuseamento da calculadora gráfica

A *complexidade da calculadora* (existência de muitos menus e muitos botões) e a *falta de prática* (não saber trabalhar com o recurso) foram a dificuldade mais referida no decorrer das aulas, indo ao encontro das minhas observações, como já referido.

A exploração da calculadora gráfica promoveu a prática de *transformação entre representações*. O excerto da discussão em grupo ilustra uma das dificuldades sentidas pelos alunos no manuseamento com a calculadora gráfica: a *transformação algébrica* para uma equação do tipo $y = ax + b$ e com a *introdução na calculadora* apenas a expressão $ax + b$ (fala 3).

1. **Paulino:** Professora [cooperante] quem é que escreveu isto aqui [calculadora gráfica]?
2. **Professora Cooperante:** Elas estavam todas limpas, eu verifiquei-as.
3. **Paulino:** Mas está aqui um “1Y”!
4. **Professora Cooperante:** É porque as equações a introduzir são do tipo y=ax+b. Já estão nessa forma?
5. **Paulino:** [Fala para o seu par] Temos que isolar o y dos outros.

O excerto transcrito corresponde à resposta escrita do par Paulino-David (Figura 5.39). Verifica-se que o manuseamento algébrico do sistema de equações e a representação verbal evidenciam a compreensão que a solução gráfica do sistema algébrico é o único *ponto de interseção das duas retas*, apesar da confusão entre a terminologia coordenadas e ordenadas.

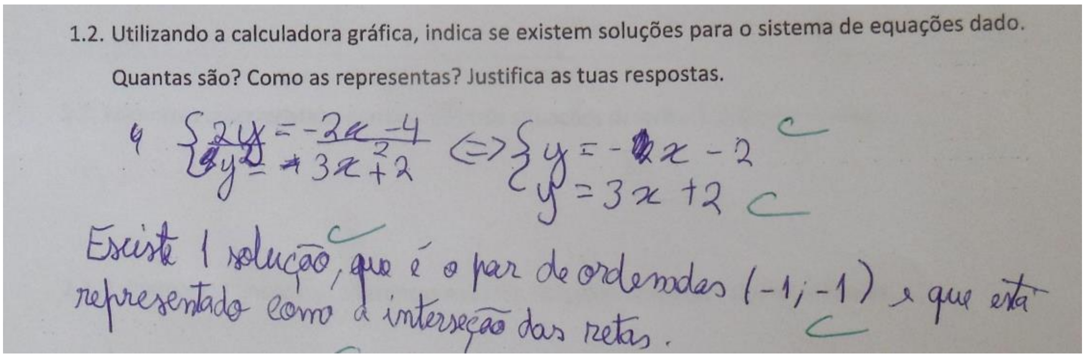


Figura 5.39 - Resolução do par Paulino-David à questão 1.2 da Tarefa “Interpretação Geométrica de Sistemas de Equações”

Vantagens e desvantagens

Na perspetiva dos alunos existem vantagens (Figura 5.40) e desvantagens (Figura 5.41) no uso da calculadora gráfica.

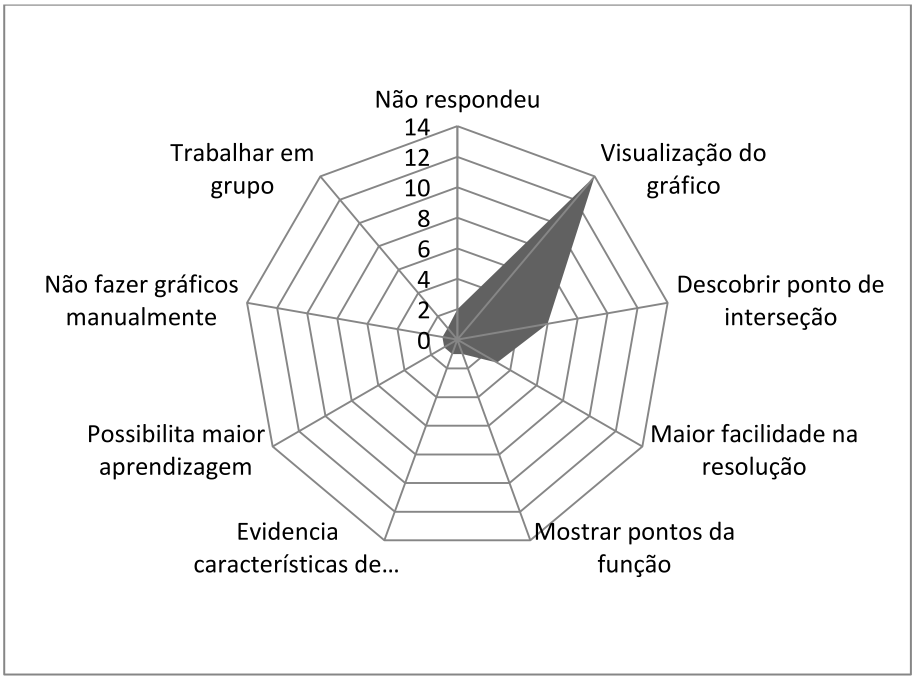


Figura 5.40 - Vantagens na utilização da calculadora gráfica

O número de alunos que não identificou uma desvantagem é maior, 7, do que os que não identificaram uma vantagem, 2 (Figuras 5.40 e 5.41). Este dado pode ser interpretado como uma simples falha na resposta à segunda questão ou porque associam apenas vantagens ao recurso em análise. Contudo, a *complexidade da calculadora gráfica* é a maior desvantagem identificada pelos alunos (Figura 5.41). Apesar disso, a maioria identifica o aspeto de visualização como a maior vantagem, além de facilitar a identificação do ponto de interseção. Estes aspetos vão ao encontro das minhas expectativas. Verifiquei que, ao longo das aulas, a recetividade à calculadora gráfica foi aumentando mas o *tempo disponibilizado* não foi suficiente para 'vencer' a complexidade deste recurso.

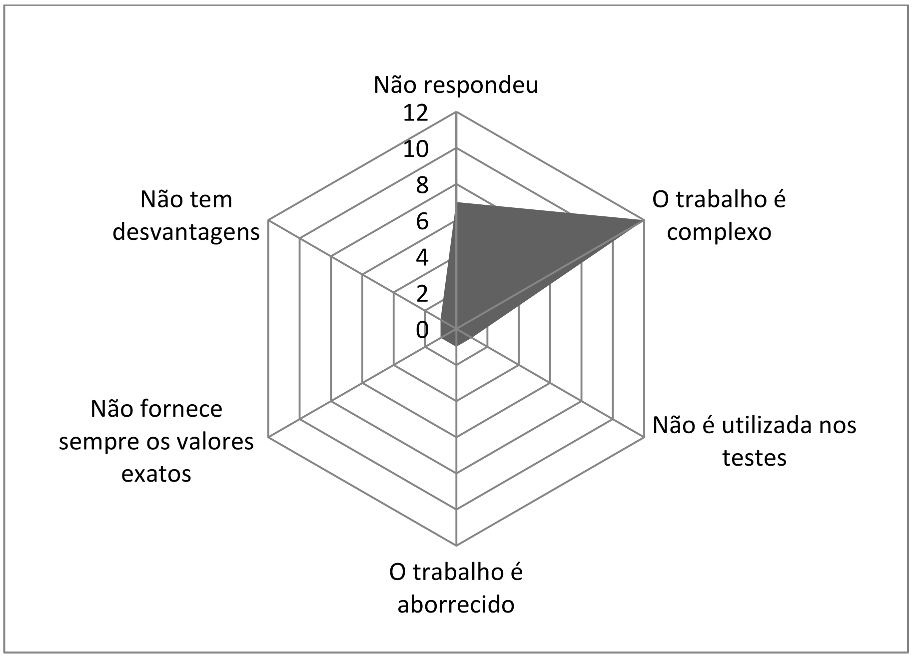


Figura 5.41 - Maior desvantagem na utilização da calculadora gráfica

Sistema de Representação do tipo Algébrico

A representação algébrica tem sido trabalhada ao longo do ano, principalmente, nas unidades curriculares que antecederam a correspondente à minha intervenção letiva. Não há dúvida, pelos exemplos já analisados até aqui, que esta é a representação mais utilizada. Devido aos vários exemplos evidenciados até então, opto por não repetir a análise feita em outras categorias de análise.

Sistema de Representação preferencial

A Figura 5.42 indica qual o sistema de representação preferido pelos alunos. Os alunos exprimiram a sua opinião por meio do questionário anónimo no qual confrontei-os com a preferência entre a representação algébrica (método de substituição) e a representação gráfica.

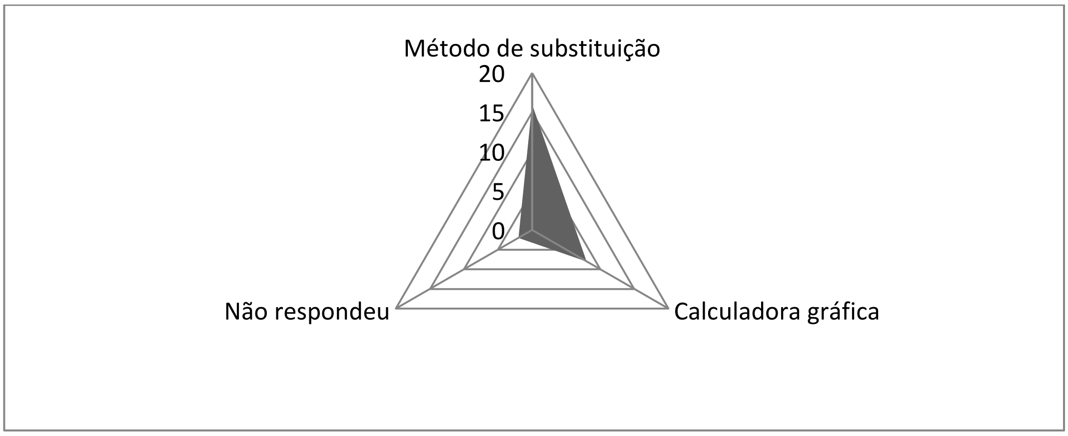


Figura 5.42 - Calculadora gráfica versus método de substituição (algébrico) na resolução de sistemas de equações

O número de alunos que preferiu o método de substituição, 16, foi o dobro dos que preferem o método gráfico, 8. Apenas dois alunos não responderam a esta questão, pelo que facilmente conclui que a representação algébrica foi a preferida da maioria dos alunos. A Figura 5.43 mostra as situações, referidas pelos alunos, em que a calculadora foi uma mais-valia na realização das tarefas.

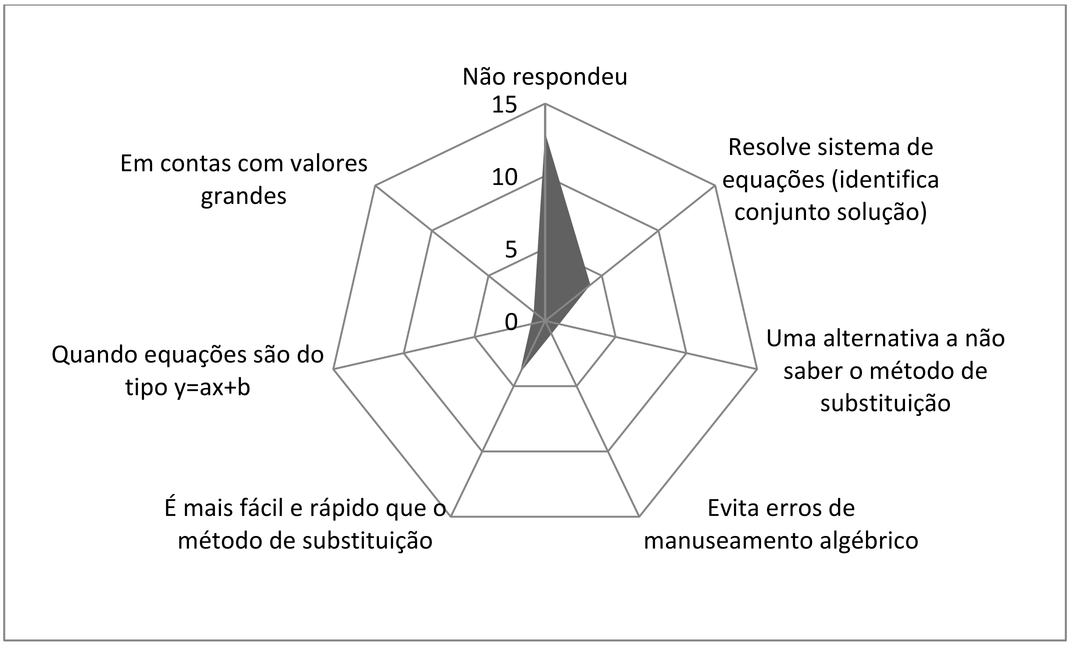


Figura 5.43 - Situações em que a calculadora gráfica é uma mais-valia

A grande parte dos alunos referiu que a calculadora gráfica proporcionou rapidez na resolução de sistemas de equações e maior facilidade em encontrar o(s) ponto(s) de interseção. Apenas um aluno reconheceu que este recurso evita os *erros algébricos* se as equações do sistema foram do tipo $y = ax + b$ (Figura 5.44), informação que foi repetida várias vezes durante o trabalho com este recurso.

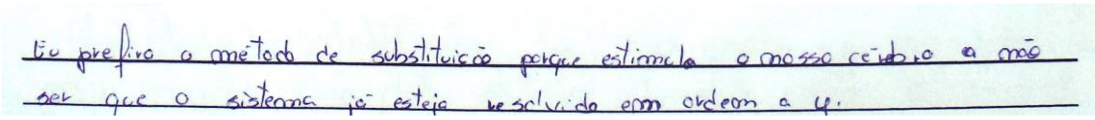


Figura 5.44 - Uma vantagem associada à calculadora gráfica

Realço a resposta de um dos alunos, que não foi considerada neste gráfico por se encontrar fora do âmbito do mesmo, que referiu que a calculadora gráfica nem sempre dá os valores exatos (Figura 5.45). Esta foi uma das vantagens referenciadas ao sistema de representação algébrico face ao gráfico, contudo apenas pouco alunos o referiram nas suas respostas.

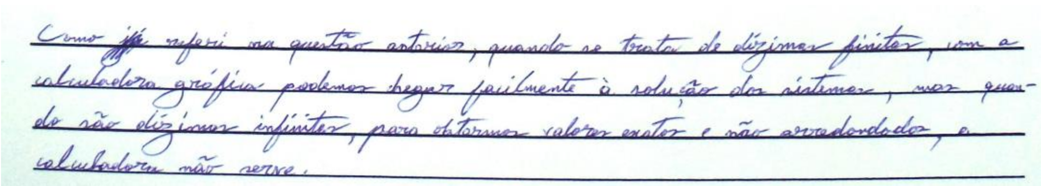


Figura 5.45 - Uma desvantagem associada à calculadora gráfica

A minha expectativa face às preferências dos alunos foi, mais uma vez, ao encontro dos resultados obtidos na maioria das produções escritas e por análise direta. Mais uma vez refiro o *pouco tempo de trabalho com este recurso* e, durante as aulas, de escolha livre, a calculadora gráfica foi utilizada por muito poucos alunos.

Síntese

A análise às produções escritas permitiu-me inferir que os alunos recorreram maioritariamente aos sistemas de representação algébrica. De um modo geral as tarefas permitiram a utilização de todos os tipos de representações consideradas no quadro teórico. Possibilitaram transformações entre eles, principalmente entre a representação gráfica e algébrica e vice-versa. Apesar de referirem o método algébrico, a formalização da sua linguagem é ainda uma dificuldade para alguns. A calculadora gráfica foi usada para garantir rapidez e precisão na elaboração de gráficos mas não foi bem aceite por todos. Na perspetiva dos alunos, a complexidade que envolve a calculadora gráfica e os cálculos algébricos que são necessários para proceder à introdução dos dados conferem ao trabalho com este recurso uma desvantagem perante os cálculos algébricos que garantem exatidão na descoberta da solução.

Resolução de Problemas

Nesta categoria são consideradas para análise (*i*) a compreensão dos enunciados, (*ii*) as estratégias de resolução e (*iii*) a interpretação da solução matemática face ao contexto do problema.

Compreensão dos Enunciados

A resolução de problemas é uma das tarefas que privilegia a atividade matemática centrada nos alunos, potenciando a autonomia dos mesmos. Contudo, para que isso aconteça, é de grande importância a clareza dos enunciados das tarefas. Esta foi uma das minhas grandes preocupações na elaboração da proposta pedagógica, contudo, há melhorias a fazer. Neste sentido, procurei analisar situações em que a realização da tarefa ficasse comprometida pela *compreensão dos enunciados*. Tendo em conta as entrevistas realizadas e as tarefas selecionadas para esta análise posso concluir que não existiram dúvidas que impedissem o bom desempenho dos alunos. Estendendo esta análise às restantes tarefas da proposta pedagógica, posso referir algumas dúvidas que surgiram e que merecem atenção na sua retificação:

- Figura 2 da Tarefa "Planear escadas com a Matemática" (Anexo II) → Situação já relatada na análise do sentido de variável, dificultando o trabalho de um par;
- Questão 4.2 da Tarefa "Aplico o que Aprendi – 3" (Anexo VII) → O enunciado da tarefa pressupõe que seja encontrada uma resposta válida. O sistema é impossível, o que sugere aos alunos que a respetiva resolução (correta) esteja incorreta;
- Alguns sistemas de equações de tarefas que foram planeados para trabalhar com a calculadora gráfica → Envolvem cálculos ligeiramente mais complicados que, se incorretos, podem comprometer o sucesso da tarefa exploratória.

No sentido de fazer uma avaliação mais fidedigna e direcionada a todos os elementos da turma apresento a organização das respostas ao questionário anónimo sobre a clareza dos enunciados (Figura 5.46).

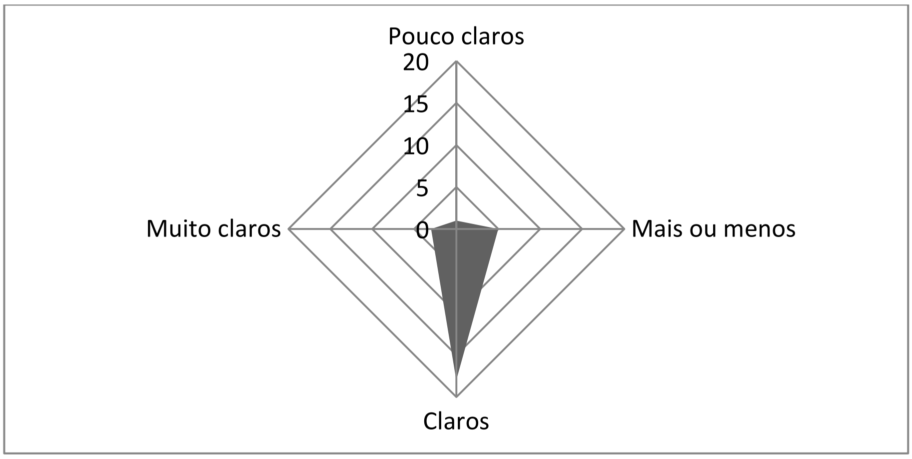


Figura 5.46 - Clareza do enunciado das Tarefas propostas

A triangulação de diferentes tipos de dados confirmam que não houve dificuldade na compreensão dos enunciados, apenas situações muito pontuais. A análise das produções escritas não evidencia dificuldades ligadas à falta de compreensão dos enunciados. A Figura 5.47 mostra as principais dificuldades identificadas pelos alunos. O questionário estava direcionado para as dificuldades sentidas a nível dos enunciados mas, das 13 respostas obtidas, a maioria não se refere aos enunciados das tarefas mas a dificuldades gerais que foram sentindo nas aulas.

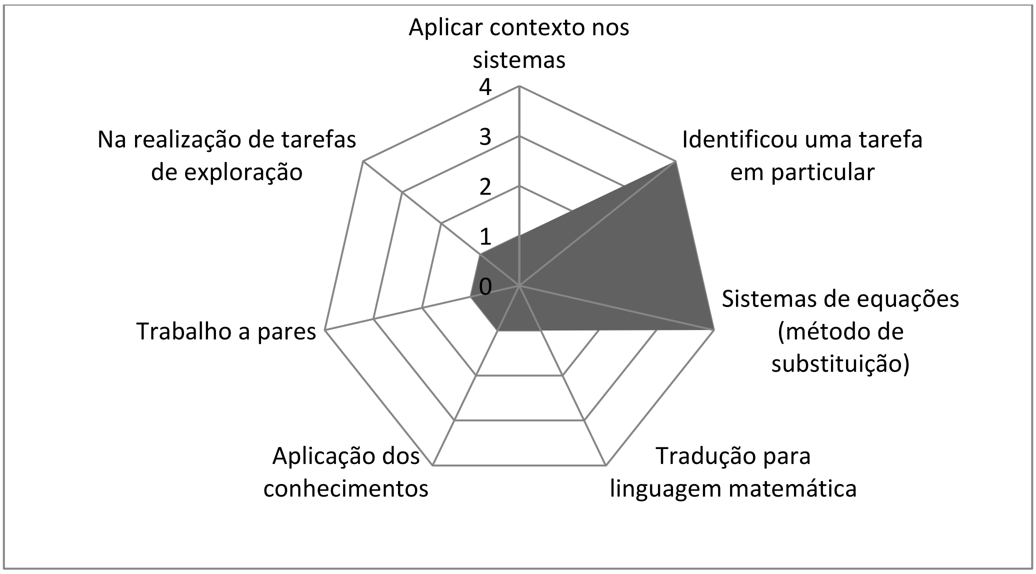


Figura 5.47 - Principais dificuldades identificadas pelos alunos

Analisando o teor das dificuldades, verifiquei que estão relacionadas com situações pontuais ou a situações de formalizações algébricas com a resolução de sistemas de equações pelo método algébrico. As observações diretas permitem-me referir que a maior dificuldade foi a apropriação do conceito de substituição no contexto matemático, bem como a sua formalização.

Estratégias de Resolução

Nas tarefas analisadas para esta subcategoria, realizadas durante a lecionação, não houve partilha em grande grupo mas discussão a pares. As calculadoras gráficas foram disponibilizadas para a Ficha "Aplico o que aprendi – 3" como recurso não obrigatório. A informação relativa à estratégia de resolução foi compilada (Quadro 5.1) de modo a facilitar a compreensão das mais utilizadas em cada tipo de problema.

Quadro 5.1 *Estratégias escolhidas pelos alunos para resolução de problemas*

	Tarefas não contextualizadas		**Tarefas com contexto próximo ao real**		**Tarefas com contexto geométrico**	
	Escolha múltipla (seleção da sol.)	**Resolução de sistemas**	**"Os iogurtes para o acampa-mento"**	**"As galinhas e os coelhos"**	**"Figuras geomé-tricas"**	**"O triângulo isósceles"**
Pictórico	-	-	1	-	-	-
Aritmético	8	-	5	4	-	-
Gráfico	-	-	-	-	-	-
Algébrico	5	5	6	9	6	12
Misto	-	1	1	-	1	-
Não respondeu	-	7	1	-	5	2

A representação gráfica apenas foi utilizada em articulação com a representação algébrica na resolução de sistemas por um par de alunos que identificou a vantagem da utilização da calculadora gráfica nos sistemas cujas equações são do tipo $y = ax + b$.

A representação verbal não foi considerada na compilação porque a sua utilização foi apenas usada na indicação dos dados e, principalmente, na indicação das respostas. É exceção a representação mista à tarefa "Figuras geométricas" em que o par Dália-Isabel recorre à combinação de uma representação algébrica, bem conseguida (Figura 5.48), para indicar o sistema que permite encontrar as medidas das duas figuras geométricas mas a explicação do procedimento sugere verbalmente (Figura 5.49) uma resolução aritmética por tentativa-erro.

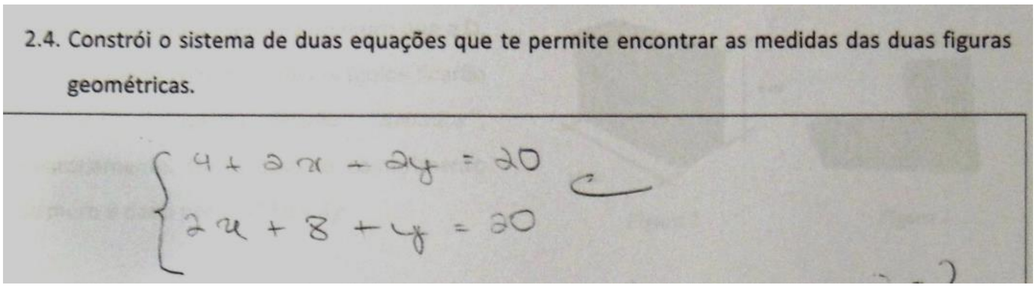
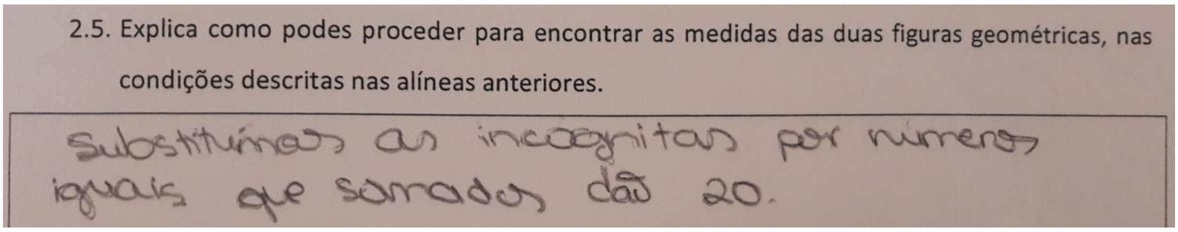


Figura 5.48 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 2.4 da tarefa "Figuras geométricas"

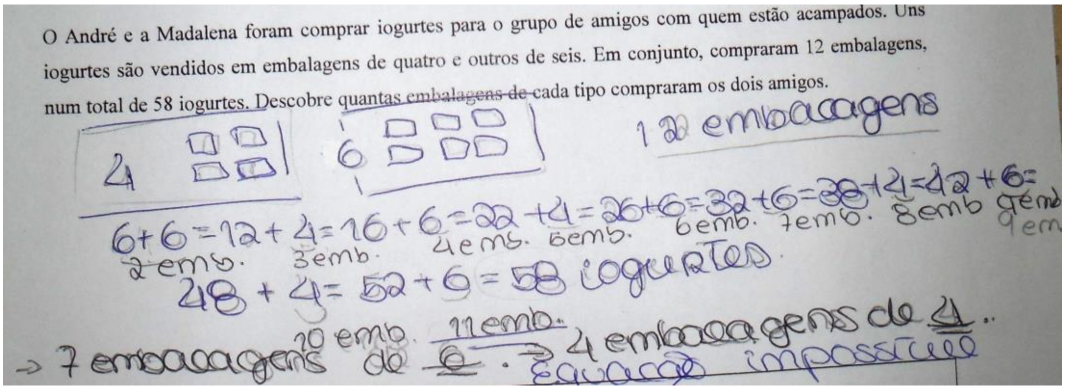


2.5. Explica como podes proceder para encontrar as medidas das duas figuras geométricas, nas condições descritas nas alíneas anteriores.

Substituímos as incógnitas por números iguais que somados dão 20.

Figura 5.49 - Resolução do par Dália-Isabel à questão 2.5 da tarefa "Figuras geométricas"

A representação mista usada pela aluna Teresa na resolução do problema "Os iogurtes para o acampamento" combina a representação pictórica para indicação dos tipos de iogurtes referidos (dados), com uma resolução aritmética sem sucesso (Figura 5.50) e uma algébrica com sucesso, orientada por mim.



O André e a Madalena foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas ~~embalagens de~~ cada tipo compraram os dois amigos.

4 6 12 embalagens

6+6=12+4=16+6=22+4=26+6=32+6=38+4=42+6=

2emb. 3emb. 4emb. 5emb. 6emb. 7emb. 8emb 9emb

48+4=52+6=58 iogurtes

10 emb. 11emb.

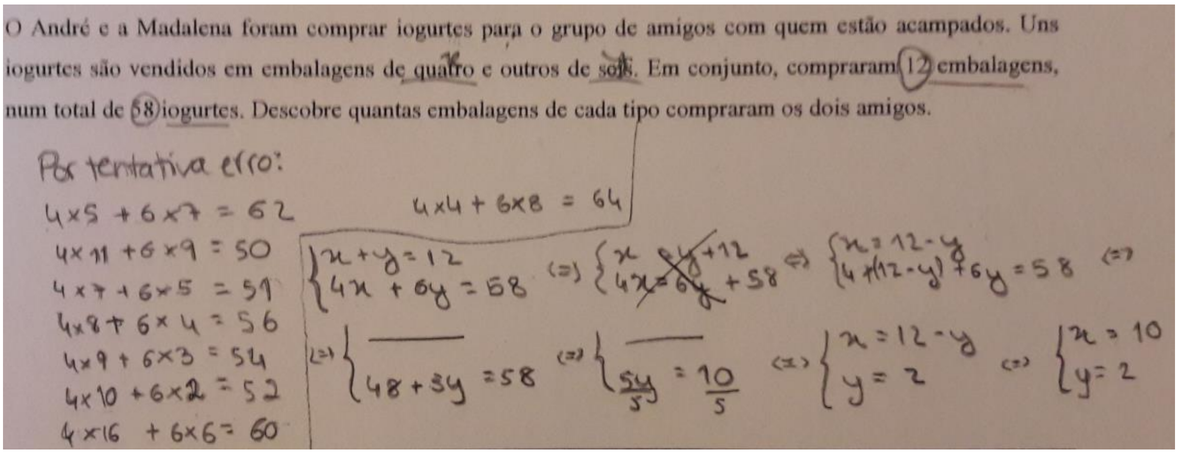
→ 7 embalagens de 6. → 4 embalagens de 4.

Equação impossível

Figura 5.50 - Resolução da aluna Teresa ao problema "Os iogurtes para o acampamento"

A representação pictórica escolhida pelo par Josefina-Nelson, na resolução do problema "Os iogurtes para o acampamento" foi sugerida por mim como estratégia para vencer as respetivas dificuldades (ver Figura 5.31, subcategoria sistema de representação pictórico). Os objetivos eram motivar os alunos a resolver tarefas de forma autónoma, permitir que eliminassem dúvidas de *compreensão do contexto* e, dar início à compreensão do método algébrico. Os dois primeiro foram alcançados mas o terceiro não.

A representação aritmética foi utilizada nos problemas verbais com contextualização próximo do real e no de escolha múltipla (sem contextualização), que corresponde à escolha da opção que é solução do sistema dado. Quanto a este último, este método traduz o reconhecimento de que uma solução do sistema transforma as equações em proposições verdadeiras, verificando a sua exatidão, não traduzindo nenhuma dificuldade. O mesmo não acontece com os problemas de contexto próximo à realidade. Na maioria dos casos a escolha desta estratégia está associada à dificuldade em *definir as incógnitas* mas, por vezes, não existe empenho em tentar a representação algébrica. Não é o caso do par que escolhi para exemplificar esta dificuldade, Dália-Isabel (Figura 5.51). As alunas mostraram duas estratégias escritas; uma aritmética, tentativa-erro com várias concretizações mas sem alcançar a solução final, e outra algébrica, com resolução de um sistema de equações mas com má aplicação da propriedade distributiva (3.º passo).


O André e a Madalena foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois amigos.

Por tentativa erro:

4×5 + 6×7 = 62
4×11 + 6×9 = 50
4×7 + 6×5 = 59
4×8 + 6×4 = 56
4×9 + 6×3 = 54
4×10 + 6×2 = 52
4×16 + 6×6 = 60

4×4 + 6×8 = 64

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 4x+6y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cancel{y}+12 \\ \cancel{4x=6y}+58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ 4+(12-y)+6y=58 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 48+3y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \frac{5y}{5}=\frac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases}$$

Figura 5.51 - Resolução do par Dália-Isabel ao problema “Os iogurtes para o acampamento”

O excerto da discussão entre o par mostra que a estratégia inicial era algébrica, destacando os dados necessários (fala 1) e reconhecendo que a soma das incógnitas deveria totalizar 58 iogurtes (fala 2). A designação das variáveis, *x* e *y*, foram indicadas sobre o enunciado, usando uma *escrita abreviada* que pode conduzir a uma interpretação errónea das incógnitas.

1. **Dália**: Compraram 12 embalagens e são 58 iogurtes, vamos ter que fazer isto e isto [suponho que apontou para os dois valores e o verbo fazer quereria dizer trabalhar]
2. **Isabel**: Porque temos que fazer $x + y = 58$ e depois saber quantos de *x* e quantos de *y*. Depois temos que dividir o *x* e o *y*.

A divisão do valor 58 por 2 foi o passo seguinte mas não conseguiram justificar o raciocínio, promovendo *manuseamentos sem significado*. No sentido de as ajudar a tomar consciência da operação que estavam a realizar, questionei-as quanto ao resultado (falas 3 e 6). Uma das alunas compreendeu a confusão: não podiam ser 29 embalagens (fala 4) porque essas eram 12 (fala 5). Contudo, não perceberam a divisão por 2 (falas 7 e 8).

3. **Professora:** E vocês dividiram o 58 por 2, quer dizer que havia 29 quê?
4. **Dália:** Embalagens.
5. **Isabel:** Não, são 12 embalagens.
6. **Professora:** 12 embalagens! Mas ao dividirem o 58 por 2 chegaram ao número 29. O que representa o número 29?
7. **Dália:** Amigos…!?!
8. **Isabel:** Daqui a pouco dizemos-lhe o que é o 29, É que eu perdi-me! Eu já nem sei porque é que dividimos por 2.

Na fase seguinte, começaram a criar situações concretas (fala 9 e 12) verificando que a solução encontrada não servia (fala 15) mas tomaram consciência do tipo de estratégia quês estavam a tomar (fala 16).

9. **Isabel:** Podemos fazer 6×4 que dá 24. Este não dá! 6×7?
10. **Dália:** O que estás a fazer?!
11. **Isabel:** São 7 embalagens de 6 iogurtes.
12. **Dália:** E dá 42!? Então isso quer dizer que está errado porque o total devia dar 58 [e não 52, como se vê na primeira tentativa escrita na Figura 5.51]
13. **Isabel:** Calma! Vamos fazer por tentativa-erro, deixa-me escrever.

As alunas, confusas, discutiram várias tentativas sem chegar a uma solução válida e perceberam que iriam demorar a encontrar a solução por este método. Sugeri que tentassem o método algébrico e questionei-as sobre as incógnitas (fala 14). As alunas reconheceram que eram duas (fala 15 e 17) mas não estavam seguras quanto ao seu significado porque as respostas foram contraditórias (falas 19 e 21).

14. **Professora:** Quantas incógnitas é que vão ter? O que é que estão a perguntar?
15. **Dália:** Vamos ter duas… O de 6 e o de 4.
16. **Professora:** Escolham os nomes e digam o que representam.
17. **Dália:** x e y, pode ser?
18. **Professora:** Já têm as incógnitas, certo?! O que quer dizer o x?
19. **Isabel:** Embalagens de 4.
20. **Professora:** O número de embalagens de 4 ou 1 embalagem de 4?
21. **Par:** Uma embalagem de 4!

O meu questionamento (fala 20) pode ter induzido ao erro mas pretendi que tomassem consciência que seria o número de embalagens de 4 e não 4 iogurtes. Com a continuação do questionamento (falas 22, 25 e 28) as alunas alcançaram o que se pretendia (falas 29, 32), o significado de x e de y.

22. **Professora:** Então o x é 4! Já tenho a solução!
23. **Dália:** Não….
24. **Isabel:** Vamos ter 4 vezes qualquer coisa.
25. **Professora:** Qual é a pergunta? O que pretendemos descobrir?
26. **Par:** O número de embalagens de 4 iogurtes e de 6 iogurtes.
27. **Dália:** Mas são 12 embalagens…
28. **Professora:** Então quais são as minhas incógnitas?
29. **Par:** O número de embalagens.
30. **Dália:** Mas assim há mais uma incógnita…
31. **Professora:** Não, não… O que nós queremos saber é quantas embalagens de 4 e quantas embalagens de 6. Então quer dizer que o x é o número de embalagens de 4 iogurtes. É isso?
32. **Dália:** É.

Analisando a resolução escrita das alunas (Figura 5.51) verifica-se que a escrita formal do sistema está correta mas o *manuseamento tem incoerências aritméticas*. Na primeira tentativa, as alunas isolaram a mesma variável, revelando *incompreensão na substituição*. Depois de orientadas, corrigiram a substituição mas cometeram um erro na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

Na resolução do problema “As galinhas e os coelhos”, o mesmo par, Dália-Isabel, continuou com dificuldade na *definição das variáveis face ao contexto* (Figura 5.52).

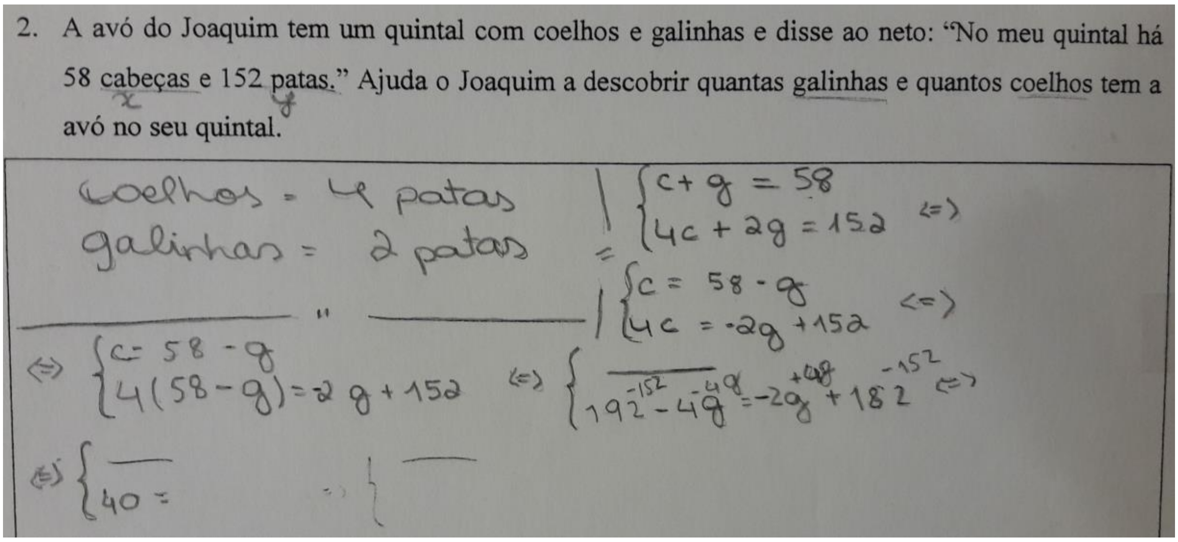


Figura 5.52 - Resolução do par Dália-Isabel ao problema “As galinhas e os coelhos”

As alunas não interpretaram as incógnitas como as quantidades desconhecidas (falas 1 e 4) sem pensar que sabem quantas cabeças e quantas patas têm (fala 6). O meu questionamento pretendeu promover uma reflexão sobre as quantidades que queriam descobrir (falas 2, 8 e 12). Enquanto a Isabel já pensava algebricamente (falas 9 e 13), a Dália ainda pensava nos dados numéricos (fala 11). Estabeleceram comparação com o problema dos iogurtes (fala 7) mostrando que foi uma boa referência nas respetivas aprendizagens. Apesar da dificuldade, verifiquei que a compreensão do significado das incógnitas foi mais célere e a compreensão das relações algébricas mais intuitiva.

1. **Dália:** Então, *x* é cabeças e *y* são as patas [a aluna escreveu no enunciado – Figura 5.52]
2. **Professora:** O que é que vocês querem saber?
3. **Dália:** Os coelhos e as galinhas.
4. **Professora:** Isabel, ela está a dizer que vocês consideram o *x* as cabeças e o *y* as patas.

5. **Dália:** Sim.
6. **Professora:** Mas nós já sabemos que são 58 cabeças e 152 patas
7. **Dália:** Pois. Este é como aquele que aprendemos [o problema dos iogurtes].
8. **Professora:** Exato. O que é que eu pretendo saber? Quais são os meus valores desconhecidos?
9. **Isabel:** $c+g$ é igual a qualquer coisa…
10. **Professora:** Boa! Gostei dessa, $c+g$ é igual a quê? Pelo menos mudamos em relação ao x e ao y.
11. **Dália:** Então agora tem que ser o 58 mais o 152.
12. **Professora:** Não sei. Quem é o c e quem é o g?
13. **Isabel:** c são coelhos e g são galinhas

Num outro caso, o par David-Paulino evidenciou (Figura 5.53), numa primeira fase da resolução do problema "Os iogurtes para o acampamento", dificuldade em *identificar as incógnitas face ao contexto do problema*:

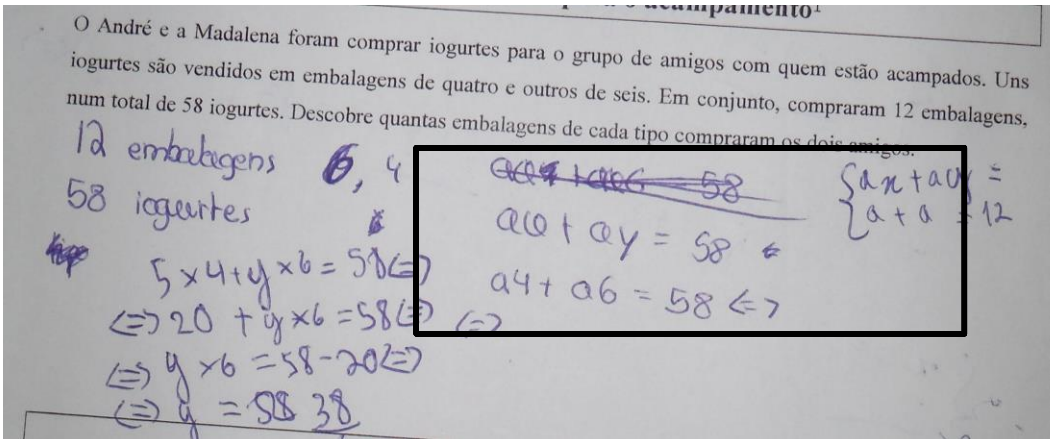


Figura 5.53 - Resolução do par David-Paulino ao problema "Os iogurtes para o acampamento" que evidencia dificuldades na definição das incógnitas (retângulo)

A discussão entre o par iniciou pela escolha da estratégia: enquanto um preferia resolver por tentativa-erro, o outro preferia ir por sistema de equações. Concordaram por esta última mas já tinham escrito a equação $ax+ay=58$. A intuição de ambos dizia que a equação não estava correta mas não conseguiram identificar o erro. Sabiam apenas que não deviam ter 3 incógnitas. Prosseguiram com a discussão até esclarecerem que a representava uma incógnita (falas 1, 2 e 3) mas, mais adiante, já era uma constante (fala 5 a 8). Solicitei esclarecimento sobre o valor de x e de y (fala 8) e verifiquei que as letras que deviam ser as incógnitas tomavam o papel de constantes (falas 9, 10 e 11). O questionamento (fala 12) permitiu um esclarecimento instantâneo (fala 13):

1. **Paulino:** Temos as 12 embalagens. Escreve $a+a=12$
2. **David:** Porquê *a*+*a*?

3. **Paulino**: Porque este aqui… O que é o a? O a é o número de embalagens. O número de embalagens de 4 e de 6.
(…)
4. **Professora:** Já têm as incógnitas? Vocês têm aí… uma, duas, três incógnitas, pelo menos.
5. **Paulino:** O a é um número….
6. **Professora:** Um valor fixo?
7. **Paulino:** Sim.
8. **Professora:** Será uma constante!? Mas vocês estão a partir do princípio… Espera, quem é o x e quem é o y?
9. **Paulino:** O x é o 4 e o y o 6, número de embalagens.
10. **Professora:** Ok. Mas vocês aqui [$a4+a6=58$] deixaram de ter o x e o y. O x é o número de embalagens de 4 ou 4 iogurtes de 1 embalagem?
11. **Paulino:** O x são os 4 iogurtes e o a é o número de embalagens.
12. **Professora:** Mas ao usar a mesma letra, vocês estão a supor que há o mesmo número de embalagens de 4 e de 6. É isso?
13. **Paulino:** Ah... Pois é. Então temos que usar aqui um x e um y.

A dificuldade do par Tomás-Paulo (Figura 5.54) também esteve relacionada com a *definição das incógnitas*. Os alunos associaram às incógnitas x e y as características de cada animal (cabeça e patas). O manuseamento algébrico realizado, com sentido, evidencia a resolução em ordem às variáveis à procura de respostas. Contudo, apesar de *identificarem os dados relevantes do problema*, não conseguem *estabelecer as relações* entre eles.

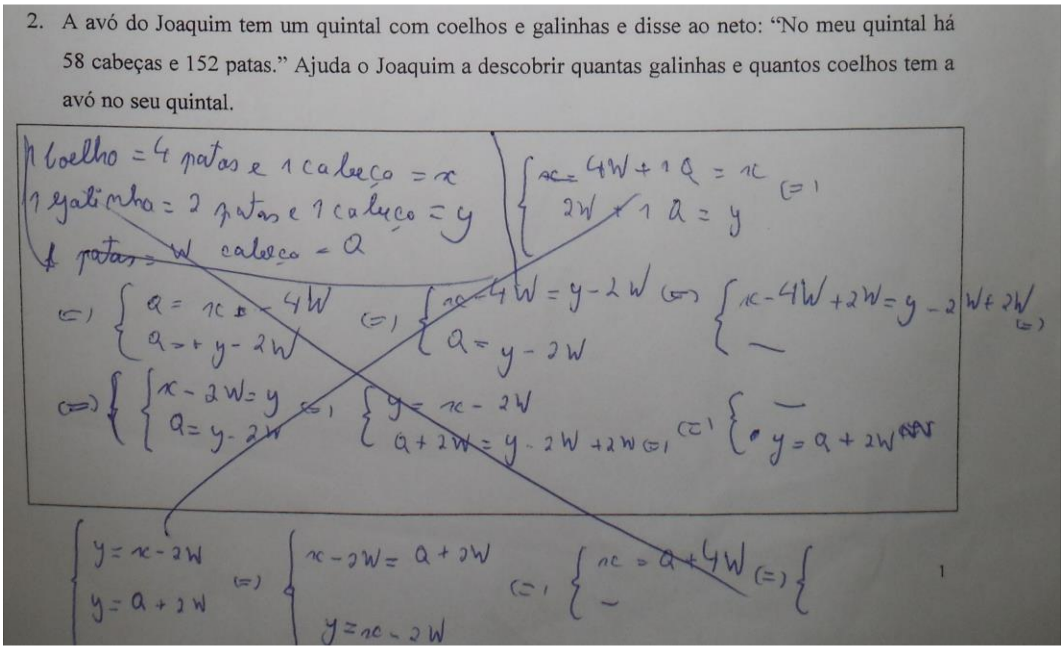


Figura 5.54 - Primeira tentativa de resolução do par Tomás-Paulo ao problema "As galinhas e os coelhos"

O método algébrico foi também o mais escolhido para resolver problemas de contexto geométrico, com dados transmitidos verbal e pictoricamente. A diferença encontrada entre os métodos aritmético e algébrico dos dois problemas deste tipo (2 colunas finais do Quadro 5.1) deve-se à fase inicial da lecionação em que a tarefa "Figuras geométricas" foi trabalhada. A formalização de sistemas estava em curso e o método de substituição ainda não tinha sido abordado. Em qualquer dos casos, as incógnitas estão definidas por meio de representação pictórica, o que, segundo os alunos entrevistados, facilitou o processo. A análise das produções dos alunos corrobora com este resultado. O par Simone-Mário (Figura 5.55) não conseguiu construir o sistema de equações porque *consideram apenas uma das relações*, transcrevendo-a para linguagem matemática. A propriedade dos triângulos, que diz que a soma dos seus ângulos internos é 180^0, foi *traduzida para linguagem algébric*a sem dificuldade por este par e pela maioria dos alunos que resolveu a tarefa.

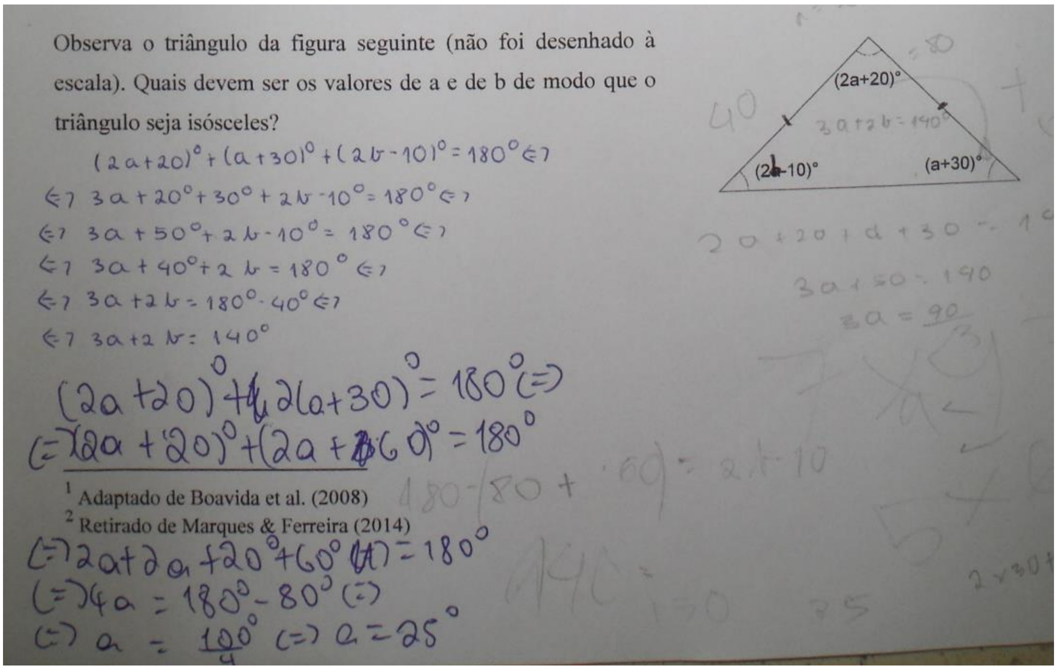


Figura 5.55 - Resolução do par Simone-Mário ao problema "O triângulo isósceles"

Neste caso, as incógnitas, *a* e *b*, foram identificadas de imediato como se pode inferir pela resolução algébrica suspensa em $3a+2b=140^\circ$. O par tentou atribuir valores concretos aos ângulos internos do triângulo mas sem chegar a nenhuma conclusão (tentativas pouco legíveis na imagem). Contudo, quando questionados na entrevista, a solução passou a estar imediatamente à vista, como se pode verificar pelo excerto da mesma. O par tem a noção que falta uma condição para resolver o problema (fala 1) mas não consegue identificá-la (falas 2 e 3) apesar de saber que um triângulo isósceles tem pelo menos dois lados iguais (fala 5). A dificuldade residia na falta de *identificação da estrutura algébrica contida na informação verbal dada* (falas 6 e 7).

1. **Mário**: Nós sabíamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo era 180º, então bastava fazer uma equação aqui. O problema é que tínhamos duas incógnitas por isso tínhamos que fazer um sistema de duas equações. E nós não conseguimos chegar a esse sistema de equações.
2. **Professora:** Porquê? Qual foi a dificuldade?
3. **Simone:** Não sei.
4. **Professora:** O que é a informação do triângulo isósceles vos dá?
5. **Simone:** Dois lados iguais.
6. **Professora:** Se tem dois lados iguais, o que é que acontece aos ângulos? É com ângulos que vocês estão a trabalhar…
7. **Mário:** Também são iguais! Ahhh… Então este ângulo $[(2b-10)^{\circ}]$ e este ângulo $[(a+30)^{\circ}]$ são iguais! E nós já podíamos resolver a equação…

O Mário escreveu novamente a equação que traduz a soma dos ângulos internos mas em vez de escrever o ângulo que depende da incógnita b $[(2b-10)^{\circ}]$ escreveu duas vezes o ângulo que depende de a $[(a+30)^{\circ}]$ uma vez que são iguais. O seu objetivo foi eliminar a incógnita b que tinha na equação anterior. O seu par não estava a concordar porque estava a usar a mesma equação que já tinham usado. Questionei-os quanto à outra forma que estaríamos à espera de ver, ou seja: $2b-10=a+30$. A Simone concordava mais com esta e escreveria o sistema com esta equação e com a descrita. Contudo, questionei o Mário pelo desenvolvimento da sua estratégia (fala 8) e sugeri que explicasse à colega. Rapidamente esclareceu-nos com a aplicação do método de substituição com escrita não formalizada no que diz respeito à conjunção (fala 9).

8. **Professora:** Escolheste esta para eliminar o *b*, não foi?
9. **Mário:** Sim! E assim posso chegar ao a! [começou a fazer cálculos algébricos até chegar ao valor de a, $a=25^{\circ}$] E agora como já sabemos o a, podemos substituir o a por 25º e assim descobrimos o *b*.

Analisando em detalhe as resoluções algébricas, a fim de compreender quais as maiores dificuldades e os erros que mais se repetiam, separei-as em corretas, corretas mas incompletas, corretas sem formalização adequada e incorretas (Quadro 5.2).

Quadro 5.2 *Análise da estratégia algébrica promovidas pelos alunos*

Tarefa	Método Algébrico - Classificação da estratégia			
	Correta	Correta mas incompleta	Correta sem formalização adequada	Incorreta
Escolha múltipla	5	-	-	-
Resolução sistemas	1	-	-	4
"Os iogurtes para o acampamento"	3	-	1	2
"Os coelhos e as galinhas"	7	1	-	1
"Figuras Geométricas"	3	2	-	1
"Triângulo Isósceles"	1	5	2	4

Atendendo aos sistemas de equações das tarefas selecionadas, os que envolvem mais cálculos aritméticos para a resolução são os da tarefa de "Resolver sistemas" e o "Triângulo isósceles"; verificando-se a existência de maiores *erros no manuseamento algébrico*. A formalização da simbologia algébrica foi compreendida pelos alunos como evidenciam os poucos registos observados. Nesta fase, o *manuseamento algébrico de sistemas mais complexo*s não estava suficientemente clarificado, justificando o elevado valor das resoluções incorretas face às corretas. A existência de um baixo número de resoluções deve-se ao pouco *ritmo de trabalho* de alguns alunos.

Interpretação da Solução Matemática

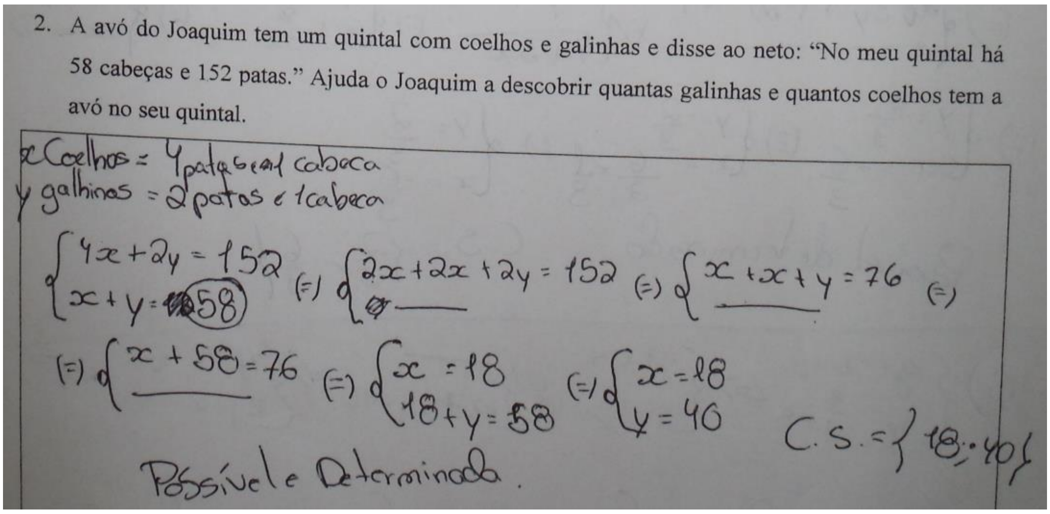
Verifiquei que a indicação da solução matemática resultante dos cálculos/raciocínio é, muitas vezes, a principal preocupação dos alunos. O *contexto* em que a tarefa se insere é muitas vezes esquecido. A informação relativa à utilização da representação verbal para *enquadrar a resposta no contexto* foi compilada (Quadro 5.3) para facilitar a análise.

Quadro 5.3 *Estratégias escolhidas pelos alunos para resolução de problemas*

	Tarefas não contextualizadas		Tarefas com contexto próximo ao real		Tarefas com contexto geométrico	
	Escolha múltipla (seleção da sol.)	Resolução de sistemas	"Os iogurtes para o acampa-mento"	"As galinhas e os coelhos"	"Figuras geomé-tricas"	"O triângulo isósceles"
Verbal (Respostas)	4	-	9	10	2	1

Posso inferir, perante os resultados obtidos, que a noção de resposta está associada ao contexto de uma situação descrita verbalmente e contexto próximo ao quotidiano. As tarefas de índole geométrica e as descontextualizadas são as que, na ótica dos alunos, não carecem de respostas completas, existindo situações de *ausência de resposta* ou apenas *indicando o valor numérico obtido*. São exceção os problemas de escolha múltipla pois, além dos valores, o aluno deve *identificar a opção correta*; o que nem sempre acontece.

Analisando as respostas dadas, verifico que há dificuldades na *formalização* na indicação dos pares ordenados e na falta de *contextualização* dos valores matemáticos face ao contexto do problema. Por vezes ocorre uma total *descontextualização* e é dada uma resposta que não se enquadra com a questão formulada. As três situações ocorrem no exemplo apresentado do par Gabriel-Leonardo (Figura 5.56).


2. A avó do Joaquim tem um quintal com coelhos e galinhas e disse ao neto: "No meu quintal há 58 cabeças e 152 patas." Ajuda o Joaquim a descobrir quantas galinhas e quantos coelhos tem a avó no seu quintal.

x Coelhos = 4 patas e 1 cabeca
y galhinas = 2 patas e 1 cabeca

$\begin{cases} 4x+2y=152 \\ x+y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2x+2y=152 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x+y=76 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+58=76 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ 18+y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=40 \end{cases}$ C.S.={18;40}

Possível e Determinado.

Figura 5.56 - Resposta do par Gabriel-Leonardo ao problema
"As galinhas e os coelhos"

A não representação da solução como um par ordenado revela a falta de compreensão do tipo de solução que se enquadra nestes problemas e a resposta "possível e determinado" é uma contextualização matemática que, muito embora esteja correto, não é solicitada e não responde claramente ao problema, impedindo ao professor de ter a noção da real atribuição de significado aos valores obtidos (18 coelhos e 40 galinhas, neste exemplo).

Síntese

A análise das produções escritas dos alunos permite-me inferir que os alunos recorreram maioritariamente à resolução algébrica. Esta tendência aumentou depois de introduzida a formalização do método de substituição. As vantagens deste método foram identificadas pela maioria dos alunos como *saber o que estão a fazer* e, apenas por alguns, para *indicar a solução exata* quando esta envolve dízimas infinitas. A calculadora gráfica é um recurso considerado *complexo* pela maioria, contudo reconhecem a grande vantagem da *visualização* que lhes permite outra perspetiva e, ainda, a facilidade em encontrar o *ponto de interseção* (automatização dos procedimentos). Os alunos demonstram maior facilidade na interpretação e resolução de problemas de índole geométrica e nas situações descontextualizadas. A interpretação das situações dos problemas verbais que traduzem situações próximas ao quotidiano são dificuldades acrescidas na definição das variáveis. A compreensão dos dados necessários para a resolução não é um obstáculo mas o mesmo não acontece com a identificação das relações entre as incógnitas. Contudo, a maior dificuldade é a *definição das incógnitas*. A escrita simplificada está muitas vezes na origem desta má interpretação e na interpretação da solução matemática obtida face ao contexto. A procura de solução numérica torna-se, muitas vezes, o objetivo dos alunos, esquecendo-se de a *interpretar no contexto* descrito.

6. Conclusões

"Decidi ver cada dia como uma nova oportunidade de ser feliz"

In agrupamentofernandopessoa.pt

Uma vez analisados os dados recolhidos para este trabalho de cariz investigativo, é necessário explicitar os principais resultados obtidos procurando responder às questões de investigação. Neste sentido, faço uma breve síntese sobre o estudo com apresentação das principais conclusões e, por fim, uma breve reflexão sobre a minha visão global desta experiência de professora-investigadora e de que forma influenciará o meu futuro profissional.

Síntese do Estudo

O estudo que agora termina foi objetivado com o propósito de compreender o pensamento algébrico de alunos de uma turma. A Escola que me acolheu foi a Escola EB 2, 3 de Fernando Pessoa, nos Olivais, e os alunos faziam parte de uma turma do 8.º ano de escolaridade. Elaborei uma proposta pedagógica para a unidade didática "equações literais e sistemas de duas equações" mas para concretizar o objetivo de investigação formulei três questões orientadoras que volto a apresentar:

(*i*) Que significados os alunos atribuem à simbologia matemática? Quais as principais dificuldades que revelam?

(*ii*) Qual o tipo de representação que preferencialmente usam? Quais as principais razões invocadas para essa escolha?

(*iii*) Quais as principais dificuldades que manifestam na tradução dos dados de um problema para linguagem simbólica e na sua resolução?

A metodologia adotada foi de natureza mista, usando dados, quer quantitativos, quer qualitativos. Contudo, o objetivo foi evidenciar as tendências e não quantificar de forma absoluta. A recolha dos dados foi feita com base na recolha documental das produções dos alunos, observação das aulas lecionadas, com registo áudio/vídeo e notas de campo, entrevistas áudio gravadas, e um questionário anónimo elaborado no final da intervenção letiva. Seguindo uma análise de conteúdo, as categorias de análise foram elaboradas mediante o quadro teórico organizado e as questões de investigação, atendendo aos significados e processos que estiveram na génese das estratégias escolhidas pelos alunos.

Principais Conclusões

O presente trabalho fica concluído com a explicitação dos principais resultados obtidos, feita de acordo com a estrutura das questões de investigação formuladas.

Simbologia algébrica

De um modo geral, os alunos conseguiram resolver as tarefas, mas nem sempre recorrendo à simbologia algébrica. No que diz respeito à compreensão demonstrada, divido a turma em três níveis: (*i*) reduzido, (*ii*) médio e (*iii*) elevado. No primeiro nível, os alunos demonstraram muita dificuldade no manuseamento da simbologia algébrica devido à pouca compreensão de alguma simbologia que especificarei em seguida. Estes casos são em número reduzido e a característica mais proeminente é a falta de autonomia na resolução das tarefas. No segundo nível, a compreensão é mediana e, apesar de utilizarem a simbologia algébrica, manifestaram dificuldades que, por vezes, comprometeram a resolução das tarefas. No último nível, a elevada compreensão leva à organização e ao detalhe nas resoluções, com apresentação de estratégias e justificações necessárias. A maioria dos alunos engloba-se no nível médio, existindo um número razoável de alunos neste último nível.

A fraca autonomia dos alunos com reduzida compreensão da simbologia algébrica deve-se, principalmente, à incapacidade de *sentir o problema* (Arcavi, 1994) por meio dos símbolos algébricos, promovendo falta de intuição sobre as estratégias a escolher. Em alternativa, utilizam linguagens próprias com os mesmos símbolos mas com significados diferentes. O sinal de igual nestes casos é tomado por um símbolo operacional, com a realização de uma operação de cada vez e encadeando-se uma série de operações com aproveitamento do resultado anterior. A soma algébrica é muitas vezes feita de modo incorreto devido à existência do sinal negativo associado ao número. O sinal de equivalente é, por vezes confundido com o sinal de igual e vice-versa. Além destes erros, a sintaxe das relações, escritas por meio de linguagem simbólica, não era bem construída devido à incompreensão da universalidade do sentido de cada símbolo. Os alunos não tinham o sentido de símbolo muito desenvolvido. A letra, para estes alunos, era interpretada como um número generalizado, ou seja, o sentido de variável também não estava muito desenvolvido. Verifiquei, assim, que a falta de compreensão da simbologia algébrica tornou-se um obstáculo para estes alunos, perdendo-se a grande potencialidade desta simbologia, como alertam Ponte, Branco e Matos (2009).

O significado da simbologia algébrica é, maioritariamente, compreendido pelos alunos no nível médio. Ao sinal de igual é atribuído um sentido de equivalência, não havendo confusão com o sinal usado entre equações equivalentes. Este, por vezes, é incorretamente usado entre uma equação com incógnitas e uma concretização dos seus valores. Os problemas são sentidos pela inspeção dos símbolos mas a intuição na sua utilização estava pouco desenvolvida. A principal dificuldade demostrada pelos alunos deste nível estava relacionada com a definição das incógnitas, revelando algum sentido de variável mas insuficiente. Apesar disso mostraram compreensão a nível das relações estruturais mas cometeram erros no manuseamento algébrico e na formalização simbólica, principalmente quando trabalhavam com duas equações. A escrita pouco desenvolvida, usada por alguns, pode estar na origem dos erros aritméticos pela pouca clareza na definição das incógnitas e dos princípios de equivalência utilizados. A reconceptualização dos símbolos algébricos foi aceite por estes alunos o que permite que tirem partido da grande potencialidade desta forma de comunicação apesar das limitações na definição das variáveis e em alguns manuseamentos formais com os sistemas de equações. Estes alunos evidenciam sentido de símbolo, mas pouco sentido de variável.

Os alunos com elevada compreensão da simbologia algébrica sentem os problemas por meio da inspeção dos símbolos com relativa facilidade. O manuseamento algébrico é cuidado e detalhado, as estratégias são explicitadas e justificadas sempre que necessário e apresentam uma visão global do problema, não perdendo de vista o objetivo de cada tarefa. Por outras palavras, a compreensão da reconceptualização dos símbolos foi compreendida e mostraram ter intuição no uso dos símbolos, adequando a sua utilização. Contudo, o manuseamento algébrico dos sistemas de duas equações do 1.º grau foi uma dificuldade que foi sendo progressivamente ultrapassada. Nestes alunos o sentido de símbolo e o sentido de variável são elevados podendo dizer-se que tiraram bastante proveito da linguagem algébrica na sua essência (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

Em suma, a maioria dos alunos da turma revela sentido de símbolo algébrico, uns com mais intuição do que outros, mas apenas uma minoria tem o sentido de variável bem desenvolvido. As dificuldades sentidas com as duas equações em simultâneo foram sendo ultrapassadas com a continuação do trabalho.

Sistemas de representação

A utilização da representação verbal ocorreu, principalmente, para a organização e transmissão da resposta das tarefas. Contudo foi, por vezes, usada na indicação dos dados, nas respostas que solicitam uma explicação e, menos vezes, como reforço da resposta dada em linguagem algébrica.

A representação pictórica foi usada como alternativa à estratégia algébrica, principalmente quando não houve intuição da simbologia e falta de ação perante uma situação problemática, contextualizada ou não. Foi pouco usada pelos alunos considerados para o estudo, muito embora tenha sido usado em problemas contextualizados. Alguns alunos utilizaram o esquema para esboçar a situação relatada no enunciado. As figuras usadas nos enunciados das tarefas foram, quase na totalidade, interpretadas corretamente e com facilidade. A representação em tabela foi utilizada, por poucos alunos, para a organização dos dados e para obtenção de respostas mas quando os dados foram transmitidos recorrendo à representação gráfica. A tabela permite a organização e visualização dos dados de forma organizada (Canavarro, 2007).

A representação aritmética foi utilizada com relativa frequência em alternativa à representação algébrica. A maioria das vezes como estratégia de resolução, outras como ponte para a compreensão da situação descrita no enunciado. Esta representação foi particularmente usada nos problemas contextualizados com situações próximas à realidade indo ao encontro do referido por Kieran (2006).

A representação gráfica foi utilizada pelos alunos, com recurso à calculadora gráfica, apenas quando solicitado. Esta representação não foi a preferencial dos alunos, apesar de reconhecerem que as grandes vantagens são a visualização, por meio do recurso usado, e a facilidade em encontrar as coordenadas do ponto de interseção (nos sistemas possíveis e determinados). Em parte esta representação foi abandonada porque na maior parte das vezes o manuseamento algébrico não podia ser dispensado para isolar a ordenada. Quanto à aprendizagem do conceito de solução de um sistema de equações, a articulação entre a representação algébrica e a gráfica foi uma mais-valia para que lhe tenha sido atribuído significado. Diferentes perspetivas sobre o conceito matemático e uma análise global aos dois tipos de representação captaram a essência que cada representação facultou, atingindo em pleno o conceito do objeto, indo ao encontro da visão de Tripothi (29008) sobre a compreensão do conceito. Apesar das dificuldades manifestadas, a leitura de gráficos são zonas de conforto para os alunos, não acontecendo o mesmo à passagem da representação gráfica para a representação algébrica uma vez que nem sempre é considerada uma visão global das equações consideradas.

Em síntese, a representação algébrica foi a mais escolhida pelos alunos porque foi largamente utilizada como estratégia de resolução, além de reconhecida no questionário anónimo pelos próprios alunos como a mais adequada. A principal razão apontada para esta escolha foi o saber o que estão a fazer, contrariamente ao que se passa na representação gráfica que apenas analisam a solução como o ponto de interseção das duas retas (nos sistemas possíveis e determinados). Por outro lado, o método algébrico apresentou vantagens em relação ao aritmético pois referiram que o segundo pode ser moroso até chegar à solução correta, quando usada uma estratégia tentativa-erro. A estas razões acrescenta-se o facto de se explorar a complexidade da linguagem algébrica ao longo das tarefas, promovendo uma maior confiança e uma melhoria no manuseamento algébrico dos alunos em geral, em alguns casos bastante significativos. O tempo que os alunos necessitam para vivenciar as experiências matemáticas é, assim, de extrema importância (Arcavi, 2006).

Resolução de problemas

A fim de responder à terceira questão de investigação, agrupei os problemas em função do enunciado: (*i*) os que são descontextualizados, (*ii*) os que usam linguagem natural e apresentam situações próximas ao real e (*iii*) os que usam linguagem verbal e pictórica, num contexto geométrico.

As situações problemáticas descontextualizadas foram de fácil compreensão quando comparadas com os problemas contextualizados. Porém, por vezes, os alunos reagiram por instinto e respondiam além do pedido ou ficam aquém deste por falta de leitura atenta ao enunciado. Os erros mais frequentes neste tipo de problemas foram as falhas cometidas no manuseamento algébrico indo ao encontro das situações descritas por Kieran (1992, 2006). Nestes problemas, as respostas não foram verbalizadas. Na maioria dos casos a obtenção do valor numérico foram confundidos com a resposta, até mesmo nas situações de escolha múltipla, esquecendo de indicar a solução correta. A interpretação dos valores obtidos ficou, nestas situações, a cargo do professor.

A linguagem natural, usada na contextualização, foi facilmente compreendida pelos alunos, contudo, na aplicação de situações reais na sala de aula tomou outra dimensão. A atribuição de significados às incógnitas, ou seja, a não concretização destas nas quantidades desconhecidas, foi a principal causa do insucesso na resolução deste tipo de situações. A estratégia tentativa-erro foi, para além da algébrica, uma das mais utilizadas para resolver este tipo de problemas. As respostas são maioritariamente verbalizadas mas nem sempre é feita a respetiva interpretação face ao contexto. A visão global do problema matemático e do contexto é apenas detetada por alguns alunos.

A linguagem pictórica, concretizada em imagens com figuras geométricas, foi facilmente compreendida bem como a linguagem natural articulada com a pictórica nos contextos geométricos considerados. A estratégia mais utilizada para a resolução deste tipo de problemas foi a algébrica, notando-se um acréscimo na utilização deste método após a formalização do método de substituição. O significado das incógnitas foi bem compreendido não revelando ser uma dificuldade acrescida. As respostas raramente foram verbalizadas e, tal como nos problemas descontextualizados, poucas vezes indicados como solução.

Os alunos entrevistados foram unânimes em considerar menos simples os problemas verbais que traduzem situações do quotidiano. A análise às produções escritas e a audição das gravações das aulas levaram-me a concluir que os alunos fizeram uma avaliação correta das suas dificuldades. Verifiquei que as situações contextualizadas com a geometria e as descontextualizadas foram de mais fácil e rápida resolução do que as que contextualizavam situações próximas à realidade. Este resultado vai ao encontro da importância que Goldin (2008) confere à contextualização na resolução de problemas, acrescentando que pode servir de modelo às representações matemáticas, mas que também pode tornar-se um obstáculo cognitivo quando se pensa na abstração matemática. Quanto ao meu estudo, restrinjo a análise à tradução do enunciado para a obtenção da generalização matemática. Assim, posso inferir que a dificuldade está na atribuição de significado à letra como incógnita, mais concretamente numa situação em que existem duas quantidades desconhecidas e duas condições que em conjunção vão permitir alcançar a solução ao problema. Goldin (2008) refere, no contexto da Álgebra escolar, que a contextualização (*i*) é largamente compartilhada; (*ii*) baseia-se nas vivências dos alunos e, por isso, fáceis de referenciar; (*iii*) tem codificações variadas e, por isso, conduz a uma elevada redundância, (*iv*) desenvolve-se primeiro que a Matemática e (*v*) é culturalmente incentivada. Considerando estes itens e a análise empírica que realizei, verifiquei que a dificuldade dos alunos estava referenciada à existência de várias codificações para a contextualização e à elevada redundância criada. Assim, a dificuldade na atribuição de significados das incógnitas foi a principal causa do insucesso na resolução de problemas algébricos verbais e contextualizados.

Nos problemas de contexto geométrico as variáveis não são ambíguas, são lugares comuns para a maioria dos alunos, assinalando-se, desta forma, a possível causa para a facilidade na resolução de problemas de índole geométrico. Há muito que, num contexto matemático, os alunos trabalham com ângulos ou com comprimentos e a visualização das incógnitas na imagem que acompanha o problema pode facilitar a compreensão. Caso não exista uma figura, os alunos podem construí-la, com mais ou menos rigor, e a visualização das quantidades torna a compreensão mais favorável a uma resolução de sucesso. Realço a importância do item das vivências dos alunos. É necessário ter em atenção que situações que tendem a ser do foro comum por uma geração podem não ser para outras. Esta situação foi concretizada com a tarefa “Os iogurtes para o acampamento” pois um dos alunos questionou a existência de iogurtes vendidos em embalagens de 4 e de 6 com a seguinte questão: “É tipo em paletes?”. Deste modo se compreende que o contexto, só por si, pode tornar-se uma dificuldade pelo facto de não ser vivenciado pelo aluno.

Pensamento algébrico

Atendendo ao conjunto dos dados recolhidos e do conhecimento que fui tendo sobre cada aluno ao longo do ano letivo, compreendo que o pensamento algébrico encontrava-se em diferentes fases de desenvolvimento. Apesar de complexa a *distinção* destas fases, estabeleço uma correspondência entre os níveis de compreensão da simbologia algébrica e as estratégias utilizadas, bem como com as dificuldades sentidas. Assim, as fases de desenvolvimento vão ao encontro da classificação apresentada por Kieran (1992) e por Sfard & Linchevski (1994) quando referem as fases operacional, estrutural e funcional.

Os alunos que relevaram défice na compreensão da simbologia foram os que não tiveram intuição sobre o uso dos símbolos algébricos e, como tal, não recorreram a estratégias algébricas mas sim aritméticas ou pictóricas. A falta de decisão sobre a estratégia, revelando-se em falta de autonomia para a utilização de resoluções algébricas mais elaboradas, levou-me a sugerir a alguns alunos a escolha da estratégia aritmética tentativa-erro ou pictórica, por organização de esquemas, para que facilitasse a passagem para a representação algébrica com significado. Situação que vai ao encontro do que Sfard e Linchevski (1994) defendem quando referem que a mesma representação pode ser analisada pelas conceções operacional e estrutural, garantindo um aumento da compreensão e suportando uma transição com significado real para os alunos. A maioria dos alunos compreendeu o significado de uma incógnita como uma quantidade desconhecida e de uma equação como uma igualdade na qual existe uma incógnita. Contudo, para os alunos com muitas dificuldades, a verbalização destas definições não passava de uma lengalenga decorada e sem sentido. A estes, por observação das produções escritas, correspondi a permanência na *fase operacional do pensamento algébrico*. E, tal como referido por Kieran (1992), constatei que a letra era tomada por um número generalizado e os problemas eram resolvidos por tentativa-erro ou por esquemas pictóricos que traduziam a situação contextualizada.

Os alunos com compreensão mediana da simbologia algébrica revelaram ter sentido de símbolo e conseguiram resolver os problemas por meio de representações algébricas. O sentido de símbolo estava bem desenvolvido mas não o sentido de variável. À letra foi facilmente atribuído o papel de incógnita quando estas já estavam definidas. Os conhecimentos matemáticos prévios tornaram situações destas em zonas de conforto. Porém, a existência de duas incógnitas e a não explicitação do significado das letras usadas em certos contextos foram dificuldades acrescidas. A formalização algébrica foi aqui posta em causa pela falta de compreensão do significado da letra como uma incógnita. E, como referem Ursini (2011) e Usiskin (1999), o primeiro passo na aprendizagem formal da Álgebra escolar é compreender o uso das letras. De referir que a vivência das várias experiências promovidas pelas tarefas planeadas permitiu que o trabalho com as duas incógnitas em simultâneo (sistemas de equações) fosse progredindo, indo ao encontro do que foi preconizado por Arcavi (2006) quanto à vivência das situações matemáticas. A utilização da representação gráfica também potenciou esta progressão. A estratégia mais utilizada pelos alunos que se inserem neste grupo foi a algébrica. Os erros aritméticos foram mais frequentes nos sistemas de equações mais complexos, principalmente na aplicação dos princípios de equivalência. Os alunos com estas características encontravam-se na *transição da fase operacional para a estrutural*.

Os alunos com elevada compreensão da simbologia matemática foram os que mostraram mais intuição sobre a utilização dos símbolos e das variáveis algébricas. Estes alunos tiraram partido da grande vantagem da linguagem algébrica como salientam Ponte, Branco e Matos (2009). As estratégias mais usuais foram as algébricas, as justificações apresentadas e a visão global das situações permitiu uma transformação entre sistemas de representação de tal forma que o conceito foi compreendido com significado. Ocorreram alguns erros algébricos mas de forma pontual e a formalidade algébrica foi cuidada e detalhada. As respostas eram frequentemente verbalizadas para todos os tipos de problemas e interpretadas face ao contexto do problema. Estas são as características, segundo o quadro teórico desenvolvido, dos alunos que se encontravam na *fase estrutural*.

Em suma, verifiquei que os alunos que estavam na fase estrutural foram os que mostraram maior domínio no manuseamento algébrico e que entenderam a letra como uma incógnita e até como variável, não tendo grandes dificuldades na resolução algébrica e no enquadramento das respostas face ao contexto. Os alunos que estavam na fase operacional tenderam a resolver os problemas, de forma autónoma, por meio da representação aritmética ou pictórica. Não tinham sentido de símbolo e a variável foi entendida como um número generalizado. A transformação entre sistemas de representação foi insuficiente devido à falta de visão global. Os que estavam na fase de transição ou na fase inicial da fase estrutural tenderam a resolver os problemas algebricamente. Contudo procuraram generalizar o problema por meio de estratégia tentativa-erro ou procuram resolver algebricamente mas tiveram dificuldade na atribuição de significado às incógnitas, principalmente nas situações com contextos próximos à realidade. As dificuldades nestes casos não foram, exceto em casos pontuais, no manuseamento algébrico para encontrar a solução, mas sim na tradução do enunciado de linguagem natural para linguagem algébrica.

Reflexão Final

Refletindo globalmente e sucintamente sobre todo o percurso do Mestrado em Ensino da Matemática, posso referir que foi uma experiência muito cativante, rica e interessante. As palavras que tenho não são suficientes para transmitir todos os sentimentos e sensações que, pessoal e profissionalmente, vivi e senti. O culminar de quatro anos (mestrado realizado em tempo parcial) de aprendizagens enriqueceu, sem dúvida, a preparação de uma unidade didática. A esta preparação juntei as aprendizagens realizadas com a investigação promovida para elaboração do quadro teórico deste documento. Vibrei com a partilha dos resultados dos profissionais ligados à investigação na educação matemática, tanto nacionais, como internacionais. E mais ainda com a partilha de experiências de relacionamento que vivi numa sala de aula de porta sempre aberta. Uma partilha sincera e desinteressada que iniciou com uma partilha silenciosa de observação da minha parte. Foi, para mim, a primeira vez que uma sala de aula foi partilhada e compreendida no mesmo sentido. A excelente orientação que tive, nesta experiência em concreto, por três excelentes profissionais da Educação Matemática que, sem deixar de orientar, permitiram que pusesse o meu cunho pessoal em todas as tarefas. Tenho a certeza que, no futuro, serei uma profissional da educação atenta aos detalhes humanos, imprescindível para uma boa formação de qualquer ser humano. O mesmo posso referir quanto à formação científica pois esta experiência permitiu-me estar atenta ao melhoramento dos meus conhecimentos numa perspetiva de ensino-aprendizagem tendo, como objetivo principal, as aprendizagens significativas dos alunos.

Ao iniciar esta experiência não tinha ideia de quais seriam as minhas questões de investigação. No meu contexto de vida, trabalhadora-estudante, não pretendi desenvolver nada de muito original, pois para isso é necessário tempo e disponibilidade. Contudo, o sinal de igual há muito que me fascinava, o modo como os alunos trabalham com ele e as consequências desse trabalho nas produções matemáticas. Surgiu a ideia de trabalhar com a Álgebra e, assim, a necessidade de elaborar questões de investigação que além de pertinentes fossem interessantes. As investigações iniciais levaram-me a elaborar algumas questões que foram ganhando forma até chegarem às que apresento neste documento. Agradeço também aos orientadores e professores do IE e da FCUL e aos colegas que assistiram à apresentação do plano deste trabalho que contribuíram com intervenções bastante pertinentes que me permitiram melhorar as questões de investigação. Isto porque reconheço que questões de qualidade levam a uma investigação de qualidade. Tentei, mediante este contexto, realizar uma análise de dados consistente com as questões em estudo. Confesso que foi muito difícil escolher as produções escritas pois cada uma 'contava a história de um aluno', envolvendo as ideias e as dificuldades de cada um. A análise que fiz com essas 'histórias' possibilitaram-me escrever as respostas que não pretendem espelhar outros alunos mas que poderão servir para ajudá-los. Foi uma experiência muito gratificante investigar a complexidade do pensamento algébrico e descobrir formas de as ultrapassar. A reflexão sobre aspetos conhecidos possibilitou-me ter acesso aos mesmos mas com outras lentes, realçando aspetos desconhecidos ou simplesmente não explorados.

Não posso dizer que foi uma experiência fácil, a elaboração de planos de aula, as constantes alterações às tarefas e aos respetivos planos, os *feedbacks* escritos, até altas horas da noite, para garantir a entrega na aula seguinte; mas posso afirmar que valeu a pena. Creio que fiquei a ganhar com esta aprendizagens tanto como os alunos com a partilha de saberes e de sentimentos. Não posso deixar de referir que me senti muito bem na relação com os vários alunos e, apesar de momentos menos bons, estabeleci uma relação saudável com a maioria deles ao longo do ano. Constatei que a compreensão e o empenho podem ser melhorados ou impedidos pela intervenção do afeto nas tarefas de sala de aula, como afirmam Goldin e Shteingold (2011) quando se referem aos sistemas afetivos como sistemas de representação internos de aprendizagem. A complexidade do pensamento algébrico é elevada, foi sentida e compreendida (ou não) pelos alunos e, de algum modo, foi dissecada neste trabalho.

Termino esta breve reflexão dizendo como me senti no meu papel de professora-investigadora. Quanto ao primeiro, sinto que evolui em vários sentidos. Quanto ao segundo, posso dizer que é um trabalho que nunca termina, mas é muito compensador e muito útil ao trabalho dos professores. Espero manter vivo o trabalho de ambos na minha vida futura.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14 (3)*, 24-35.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Berrincha, R. & Saraiva, M. J. (2009). Das igualdades numéricas ao estudo das equações do 1.º grau. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: EIEM.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: Ministério Educação.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Pensamento algébrico e exploração de padrões. In I. Vale. & A. Barbosa (Orgs.) *Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education*, (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Bulding district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 361–388). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Canavarro, A., P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 2*, 81-118.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266).

Dias, S. & Santos, L. (2009) Avaliação reguladora, feedback escrito, conceitos matemáticos: Um triângulo de difícil construção. *XXSIEM*. Lisboa: APM.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37–65.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT, 6*, 96-122.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics,* (pp. 173-185). Reston: NCTM.

Gafanhoto, A. P. & Canavarro, A. P. (2012). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, S. Carreira (Eds.). *Práticas do ensino da Matemática*. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Castelo de Vide: SPIEM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. Em L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education,* 178-203. New York: Routledge.

Goldin, G. A., & Shteingold, hT. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics,* (pp. 1-23). Reston: NCTM.

Grossmann, M. T. & Ponte, J. P. (2011). O sentido do símbolo de um aluno e a álgebra do 12.º ano. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, J.P. Ponte, (Eds.). Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. Póvoa de Varzim: SPIEM.

Grossmann, T. (2011). *O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra*. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Henriques, A. C., & Ponte, J. P. (2010). A comunicação matemática no contexto de Actividades de Investigação: O uso de representações Matemáticas. In *Atas do XIX EIEM*, Costa da Caparica, Portugal.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Blanton, M.., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Lawrence Erlbaum Associates..

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Em D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 390-419. New York: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, (pp. 11-50). Roterdham: Sense.

Kücheman, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 4, 23-26.

Marques, M., & Ferreira, P. (2014). *Projeto Desafios Matemática, 8.º Ano.* Carnaxide: Santillana.

Matos, A. & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.ºano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11 (002)*, 195-231.

ME (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Molina, M. (2011). Integración del pensamento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza com alunos de 8-9 años. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim, Portugal: EIEM.

EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da ´Algebra. Actas do Encontro de Investiga¸c˜ao em Educa¸c˜ao Matem´atica, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 27–51

NCTM (2008). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Nobre, T., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In M. H. Ferreira, I. Vale, J.P. Ponte (Eds.). Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Póvoa de Varzim: EIEM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *105*, 83-86.

Pesquita, I. & Ponte, J. P. (2006). Dificuldades dos alunos do 8.º ano no trabalho em Álgebra. *Atas de XV Encontro de Montegordo da SPCE*. Lisboa: SPCE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o *desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, XXIV (2)*, 111-134.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.). *From text to 'lived' resources mathematics curriculum materials and teacher development*, (pp. 282–288). New York: Springer.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*, *100*, 51-60.

Santos, L. (2015). Representações. In M. V. Pires, R. T. Ferreira, A. Domingos, C. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel, L. Santos (Eds.). *Representações Matemáticas*. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Bragança: SPIEM.

Sfard, A. & Linchesky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. London: SAGE Publications.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variable. In B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 7-13). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matematica. *QuaderniCIRD, 2*, 59-70.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME25, Vol. 4, (pp. 4.327-4.334).* The Netherlands: Faculty of Mathematics and Computer Science.

Vale, L., Ferreira, R. A., & Santos, L. (2011). O erro como ponte para a aprendizagem das equações: o caso da Maria. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.). *Ensino e Aprendizagem da Álgebra*. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Póvoa de Varzim: EIEM.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: using representations to support student understanding. Mathematics Teaching in the Middle Schcool, 14, 2, pp. 110 – 113.

Wegerif, R. (2010). *Mind expanding: teaching for thinking and creativity in primary education*. Maidenhead: Open University Press.

Anexos

ANEXO I – Tarefa “Compreendo Equações Literais”

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	3.º Ciclo 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ______________________________		

COMPREENDO AS EQUAÇÕES LITERAIS[1] - Parte 1

1. O pai da Madalena tem uma loja que vende peluches. Ele criou um enigma usando imagens e números para que a sua filha adivinhasse o preço do peluche com forma de elefante. Ajuda a Madalena e resolve o enigma.

1.1. Será que a Madalena é capaz de resolver o enigma apenas com esta informação? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

1.2. É possível traduzir este problema de forma algébrica? De que necessitas para o fazer? Apresenta a tua proposta justificando-a.

1.3. Se a Madalena atribuir um valor ao preço do crocodilo, já seria capaz de determinar o valor do preço do elefante? Porquê? Explica a tua resposta usando um exemplo.

[1] Adaptado de Nobre, Amado, & Ponte (2015).

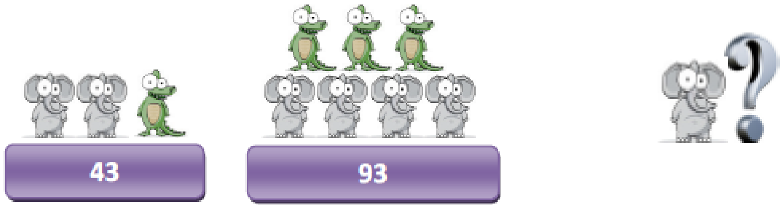
1.4. A Madalena poderá atribuir outro valor ao preço do crocodilo diferente do anterior? O que acontece?

1.5. Quantas soluções a Madalena encontrará para o problema? De que dependem essas soluções? Explica o teu raciocínio.

1.6. Caso o pai da Madalena elaborasse o enigma para encontrar o preço do crocodilo, como apresentarias algebricamente o problema? Quantas soluções achas que ela encontraria?

COMPREENDO AS EQUAÇÕES LITERAIS - Parte 2

2. O pai da Madalena completou o enigma com uma informação adicional que juntou à primeira, como mostra a figura



2.1. Será que, agora, a Madalena é capaz de resolver o enigma? Qual poderá ser o valor do preço do elefante? Explica o teu raciocínio.

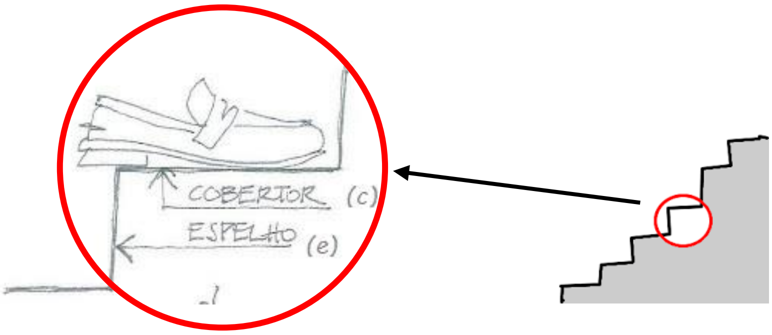
2.2. Neste caso, quantas soluções a Madalena encontra para o valor do preço do elefante? O que concluis?

ANEXO II – Tarefas “Planear Escadas com a Matemática

<table>
<tr><td>Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190</td><td>GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA</td><td rowspan="2">3.º Ciclo
2015/2016
8.º Ano
Turma ______</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA</td></tr>
<tr><td colspan="3">GRUPO: ____</td></tr>
</table>

PLANEAR ESCADAS COM A MATEMÁTICA[2]

Na construção de escadas existem algumas regras e alguns valores aconselháveis para a relação entre a medida do espelho dos degraus (e) e a profundidade do seu cobertor (c). Para que a comodidade seja garantida, verifica-se a relação: $c - e = 12$ cm. Por outro lado, para que a segurança seja garantida, verifica-se a relação $c + e = 46$ cm. A figura seguinte mostra o esquema de uma escada. Analisa os dados e responde às questões que são propostas.



1. Supõe que se constrói uma escada, com os degraus todos iguais, com 19 cm e 27 cm como medidas do espelho e do cobertor de cada degrau, respetivamente. A comodidade e a segurança ficam garantidas? Justifica a tua resposta.

[2] Adaptado de Projeto 1001 Itens (2011).

2. O pai do João pretende construir uma escada, com os degraus todos iguais, em que se verifiquem as duas relações indicadas, comodidade e segurança. No sentido de alcançar o seu objetivo, propõe que a medida do espelho de cada degrau seja 16 cm.

2.1. O João não concorda com o pai alegando que, como essa medida, não é possível construir a escada com uma medida de cobertor de modo a que as duas relações sejam verificadas. O João sugere que a medida do espelho seja 17 cm. Quem tem razão? Justifica a tua resposta.

2.2. É possível indicar um par ordenado que satisfaça as duas condições em simultâneo? Identifica-o.

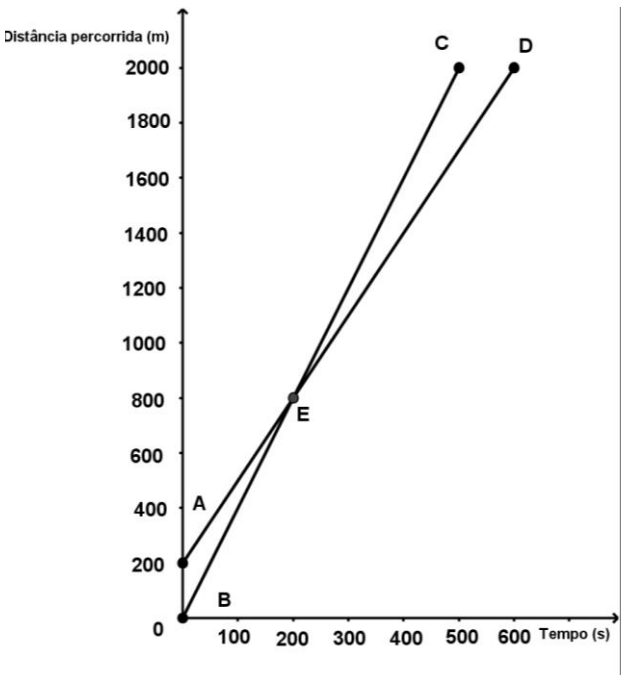
PROVA DE ATLETISMO[3]

3. A Rita e o Gustavo resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Gustavo disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.

Os gráficos abaixo mostram uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:

- O Gustavo parte do início da pista e percorre 4 metros por segundo;

- A Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.



3.1. O Gustavo tem razão ao referir que consegue vencer a prova? Explica o teu raciocínio.

[3] Adaptado de Ponte, Branco, & Matos (2009).

3.2. A que distância do início da pista está a Rita ao fim de 400 s?

3.3. Quanto tempo demora a Rita a percorrer 1500 m?

3.4. O que representam as coordenadas do ponto E?

3.5. Como podes determinar as coordenadas desse ponto?

ANEXO III – Ficha “Aplico o que Aprendi – 1”

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL · MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	3.º Ciclo 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ______________________________		

APLICO O QUE APRENDI - 1

Tarefa 1 – O muro da D. Rosa[4]

1. A D. Rosa pretende construir um muro no seu jardim e, para isso, pensou em usar alguns tijolos que lhe sobraram de outra obra. As dimensões desses tijolos estão representadas na figura 1.

A figura 2 mostra o esquema do muro que a D. Rosa pretende construir: alguns tijolos ficarão *“em pé”* e outros ficarão *“deitados”*, aleatoriamente. Neste caso, o comprimento do muro é dado por $c = 15d + 6p$.

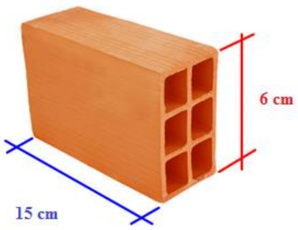


Figura 1


Figura 2

1.1. Explica, neste contexto, o que representam as seguintes expressões:

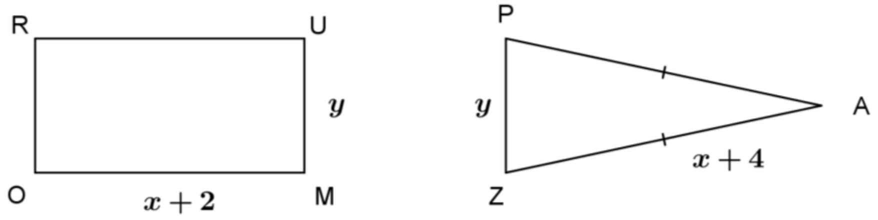
$15d$	$15d + 6p$

1.2. Supõe que o comprimento do muro é de 420 cm e que a D. Rosa utilizou 18 tijolos “deitados”. Quantos tijolos “em pé” foram colocados? Explica como procedeste para determinar este número.

4 Retirado de Marques & Ferreira (2014)

Tarefa 2 – Figuras Geométricas[5]

2. Considera o retângulo [RUMO] e o triângulo isósceles [PAZ] da figura (as medidas estão expressas em cm).



2.1. Sabendo que o perímetro do retângulo [RUMO] é 20 cm, indica uma equação literal na forma canónica, que te ajude a encontrar as dimensões dos lados do retângulo.

2.2. Indica duas soluções possíveis, respetivamente, para o comprimento e a largura do retângulo [RUMO].

5 Retirado de Marques & Ferreira (2014)

2.3. Sabendo que o triângulo [PAZ] é isósceles e que tem o mesmo perímetro do retângulo [RUMO], verifica se as soluções anteriores satisfazem a nova condição. Justifica a tua resposta.

2.4. Constrói o sistema de duas equações que te permite encontrar as medidas das duas figuras geométricas.

2.5. Explica como podes proceder para encontrar as medidas das duas figuras geométricas, nas condições descritas nas alíneas anteriores.

ANEXO IV – Tarefa “Interpretação Geométrica de Sistemas de Equações”

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	**3.º Ciclo** 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ____		

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES[6]

1. Considera o sistema de equações: $\begin{cases} 2x - y = -3y - 4 \\ y - 3x - 2 = 0 \end{cases}$

1.1. Escreve na forma canónica o sistema de equações dado.

1.2. Utilizando a calculadora gráfica, indica se existem soluções para o sistema de equações dado. Quantas são? Como as representas? Justifica as tuas respostas.

1.3. Verifica, algebricamente, os resultados obtidos na alínea anterior.

[6] Adaptadas de Marques & Ferreira (2014) e de Ponte, Branco, & Matos (2009).

2. Considera os sistemas de equações dados em (A), (B) e (C).

(A) $\begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=10 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 6x-2y=0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x-2y=-6 \end{cases}$

2.1. Recorrendo à calculadora gráfica representa graficamente cada um dos sistemas e descreve o que observas.

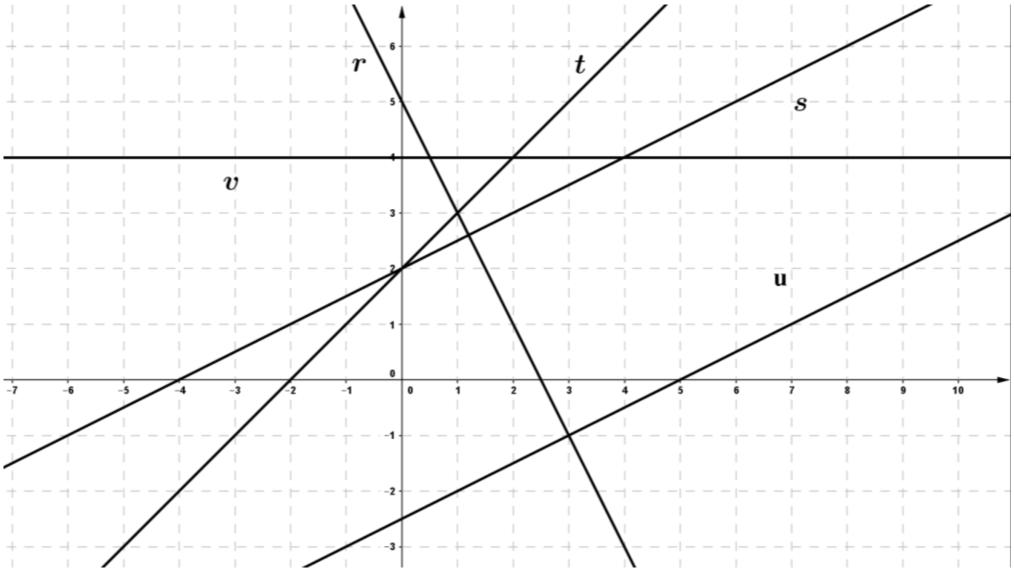
(A)	(B)	(C)

2.2. Encontras características comuns nas três situações descritas? Quais? Indica-as.

2.3. E diferenças? Encontras diferenças nas três situações descritas? Quais? Indica-as.

2.4. As diferenças encontradas irão permitir-te classificar os sistemas de equações, tal como fazes quando tens uma equação. Como pensas classificá-los?

3. Considera a representação gráfica das retas r, s, t, u e v.



3.1. Faz corresponder cada reta à sua expressão algébrica, justificando a tua escolha.

Reta ____: $y = x + 2$	Reta ____: $y = 4$	Reta ____: $y = \frac{1}{2}x + 2$
Reta ____: $y = -2x + 5$	Reta ____: $y = 0,5x - 2,5$	

3.2. Constrói sistemas de equações tais que, sempre que possível considera as equações anteriores:

3.2.1. O sistema seja possível e determinado. Justifica a tua resposta.

3.2.2. O sistema seja impossível. Justifica a tua resposta.

3.2.3. O sistema seja possível e indeterminado. Justifica a tua resposta.

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	3.º Ciclo 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ______________________________		

RESOLVO SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGEBRICAMENTE[7]

1. Considera o sistema de equações: $\begin{cases} 3x+3=y+3 \\ 3(x+2y)-4=0 \end{cases}$

1.1. Utilizando a calculadora gráfica, encontra, graficamente, as soluções deste sistema de equações. Explica como procedeste e quais os resultados obtidos.

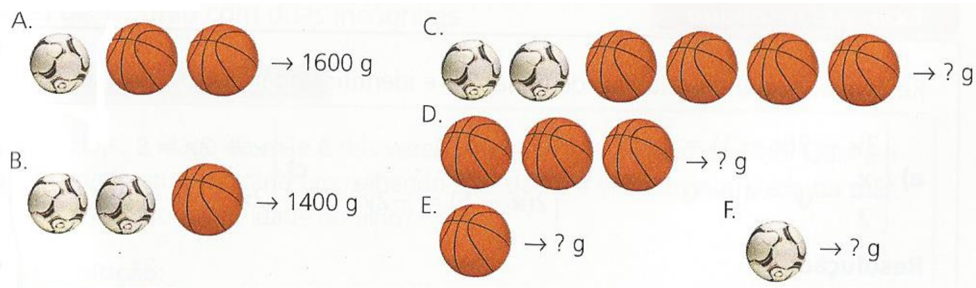
1.2. Como classificas este sistema de equações? Justifica a tua resposta.

1.3. Mostra, algebricamente, que o par de coordenadas $\left(\frac{4}{21};\frac{4}{7}\right)$ é solução das duas condições.

1.4. Que relação se pode estabelecer entre a solução obtida graficamente e o par ordenado $\left(\frac{4}{21};\frac{4}{7}\right)$? O que podemos concluir?

[7] Adaptadas de Marques & Ferreira (2014).

2. Observa as imagens seguintes.



2.1. Completa os raciocínios descritos em (C), (D) e (E) e descobre quanto pesa cada bola.

2.2. Escreve um sistema de equações que traduza as situações (A) e (B). Indica o significado de cada uma das incógnitas consideradas e tenta resolver, com substituições semelhantes à alínea anterior, cada uma das equações literais em ordem a uma variável distinta.

3. Resolve os sistemas de equações pelo método de substituição e classifica-os.

3.1. $\begin{cases} y = 2x \\ 2x + y = 16 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x + 5 = 5 \\ 2(x - 5y) = -2y \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

ANEXO VI – Ficha “Aplico o que Aprendi – 2”

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	**3.º Ciclo** 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ____		

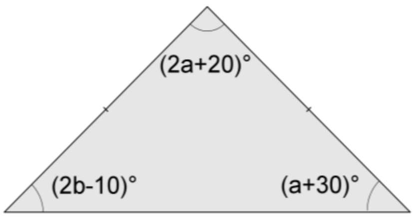
APLICO O QUE APRENDI - 2

Tarefa 1 – Os iogurtes para o acampamento[8]

O Alberto e a Madalena foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois amigos.

Tarefa 2 – O triângulo isósceles[9]

Observa o triângulo da figura seguinte (não foi desenhado à escala). Quais devem ser os valores de *a* e de *b* de modo que o triângulo seja isósceles?



8 Adaptado de Boavida *et al.* (2008)

9 Retirado de Marques & Ferreira (2014)

ANEXO VII – Ficha “Aplico o que Aprendi – 3”

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190	GOVERNO DE PORTUGAL MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA	3.º Ciclo 2015/2016 8.º Ano Turma ______
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA		
GRUPO: ________________________________		

APLICO O QUE APRENDI - 3

1. Considera o sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-10 \end{cases}$

Dos seguintes pares ordenados (*x; y*) assinala os que são solução do sistema. <u>Justifica a tua escolha</u>.

A. (-2; 8)   B. (2; -8)   C. (2;8)   D. (-2; -8)

2. A avó do Joaquim tem um quintal com coelhos e galinhas e disse ao neto: “No meu quintal há 58 cabeças e 152 patas.” Ajuda o Joaquim a descobrir quantas galinhas e quantos coelhos tem a avó no seu quintal.

3. Considera os sistemas seguintes e resolve-os pelo método que achares mais adequado (representação gráfica ou método de substituição). Apresenta a solução na forma exata (sem arredondamentos) e descreve o teu procedimento ou apresenta os teus cálculos.

(A) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x=2-\dfrac{y}{2} \end{cases}$
(B) $\begin{cases} y=-3y-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=-\dfrac{x}{2}+5 \end{cases}$

4. O Fernando disse à Maria: "Hoje a soma do dobro da minha idade com o quádruplo da tua é igual a doze mas, há dez anos atrás, a minha idade era igual ao dobro da tua."

   4.1. Escreve um sistema de equações literais que traduza a situação descrita pelo Fernando.

   4.2. Resolve, algebricamente, o sistema de equações e descobre a idade dos dois amigos.

5. No sistema de equações seguinte, *a* e *b* representam constantes. Descobre os valores de *a* e *b*, sabendo que o par ordenado (5, 4) é solução do sistema. Explica o teu raciocínio.

$$\begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 18 \end{cases}$$

ANEXO VIII – Desafio Final “As Quatro Irmãs”

<table>
<tr><td>Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190</td><td>GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA</td><td rowspan="2">3.º Ciclo
2015/2016
8.º Ano
Turma ______</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA</td></tr>
<tr><td colspan="3">GRUPO: ____</td></tr>
</table>

Desafio - As quatro Irmãs

Quatro irmãs têm € 45. Se o dinheiro da primeira fosse aumentado em dois euros e o da segunda diminuído em dois euros; se o da terceira duplicasse e o da quarta se reduzisse a metade, todas as irmãs teriam a mesma importância. Quanto dinheiro tem cada uma delas?

ANEXO IX – Grelha de observação - Avaliação

Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa 171 190

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Grelha de observação de aula do dia: ___/ ___/ ____

Turma	Apresentação/ adesão da tarefa			Fase de trabalho autónomo			Fase de discussão				TPC
Alunos	Está a ouvir	Tem conversas paralelas	Coloca questões	Trabalha em equipa	Trabalha individualmente	Não trabalha	Dá contributos positivos para a discussão	Questiona e argumenta	Apresenta justificações usando os conceitos aprendidos	Está atento, mas não participa	Fez/ Não Fez
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											

OBS.	

ANEXO X – Planificação e recursos da Aula 1 – 27 de abril de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 1 – 27/abril/2016 – 90 min.
"Compreendo Equações Literais" – Realização de uma tarefa exploratória dividida em duas partes.

OBJETIVOS GERAIS
- Compreender, de forma intuitiva e com significado, o que são equações literais. - Compreender a necessidade das duas incógnitas. - Compreender a infinidade de soluções existentes. - Compreender que a equação pode ser resolvida em ordem a qualquer das incógnitas. - Formalização do conceito. - Compreender as mudanças nos itens acima descritos, caso existam duas condições em simultâneo para a mesma situação. - Formalização da escrita de um sistema de equações e da existência de uma conjunção de duas condições.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação das tarefas; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução da parte 1; *(iv)* Discussão coletiva da parte 1 e formalização do conceito de equação literal. *(v)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução da parte 2; *(vi)* Discussão coletiva da parte 2 e formalização do conceito de sistema de equações. *(ix)* Síntese – com registo no caderno diário.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta. - Projetor e documentos para projetar, quadro e marcadores.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Início do estudo da Unidade Seis – realização da tarefa "Compreendo Equações Literais".

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - PARTE 1 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm 20 minutos para a tarefa 1 e que depois será feita a discussão a nível da turma (15 minutos). Esclarecer os alunos que, durante a discussão, **não podem** fazer correções às suas resoluções**. Devem fazer as correções no caderno diário.**

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - PARTE 1 (20 min)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir.

4.º DISCUSSÃO DA PARTE 1 + SÍNTESE (15 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário. **Formalizar** o conceito de equações literais e de incógnita – utilizar *PowerPoint*.

5.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - TAREFA 2 (20 min)
Distribuir a 2.ª parte do enunciado da tarefa e informar que dispõem de 20 min para a sua resolução. Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas.

6. º DISCUSSÃO DA PARTE 2 + SÍNTESE (20 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário. **Formalizar** a escrita de um sistema de equações e da existência de uma conjunção de duas condições.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

“Compreendo Equações Literais” - PARTE 1			
Trabalho autónomo: 20 min. + Discussão: 15 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1.1	**Respostas Previstas:** - Reconhece que não é possível pois tem dois valores desconhecidos e apenas um único total. - O valor do preço do elefante depende sempre do valor do preço do crocodilo. - Podem tentar atribuir igual preço aos dois peluches mas como 43:3 não é uma dízima finita, a situação não de pode concretizar, do ponto de vista do contexto. **Dificuldades:** - Não compreende de que animal se trata. - Não compreender a linguagem pictórica. - Não reconhece que um valor depende do outro. - Atribui um valor qualquer ao elefante e outro ao crocodilo de tal forma que a soma indicada dê 43. - Atribuir preço igual ao elefante e ao crocodilo.	**Professor:** - Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. **Apoio a Prestar:** - Questionar o aluno sobre o que vê na imagem. E o qual a interpretação que faz. A interrogação acompanha que animal? Então qual o animal que se pretende descobrir o preço? - Questionar o aluno sobre o que acontece quando se particulariza para um único preço do elefante. É uma solução única? Será esta a resposta que se espera da pergunta de saber se é possível determinar o preço do elefante? Ou solicitam um valor possível? - E se o preço que escolhessem fosse outro? Seria possível? Então encontraram o preço do elefante ou um valor possível? - Qual o valor do quociente obtido? É possível, num contexto real, esse preço? O que seria necessário fazer? Se existissem arredondamentos seria possível a soma dos preços dos três peluches dar €43?	- Compreender, de forma intuitiva, que com dois valores desconhecidos não consegue resolver de forma exata o problema.
	Respostas Previstas: - É possível se se atribuir significado a duas letras,	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do	- Averiguar a tradução

1.2.	por exemplo e = valor do preço do elefante e c = valor do preço do crocodilo. Assim, tem-se que: 2e + c = 43. São necessárias duas incógnitas para traduzir algebricamente este problema. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o que é a forma algébrica. - Não compreende como responder, matematicamente, à questão sobre o que é preciso para resolver algebricamente o problema. - Não identifica que precisa de incógnitas.	enunciado. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Questionar o aluno no sentido de tentar esclarecer o que é a forma algébrica e de que necessita para a traduzir. Do ponto de vista matemático, o que parece que significa a forma algébrica? E para isso, o que precisam de ter? Quantas?	do problema, colocado sob a forma pictórica, para linguagem matemática. - Averiguar como manuseiam as incógnitas e que significado lhes é atribuído.
1.3.	**<u>Respostas Previstas:</u>** - Se o crocodilo for € 10, por exemplo, então dois elefantes valem 43-10 = € 23. E cada elefante vale 23:2= €11,5. - O aluno pode responder que não é possível caso creia que se pretenda números inteiros para os preços. - Se o crocodilo for €11, por exemplo, então 2 elefantes valem 43 - 11 = €22. Cada elefante vale 22:2= €11. - Se um valor for atribuído ao crocodilo, então já é possível determinar o valor do elefante. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o que é pedido. - Não compreende que tipo de valor é possível atribuir: par, ímpar, natural, racional ou outro. - Não é capaz de analisar as diferenças com a alínea anterior e não consegue perceber o que acontece nesta alínea. - Não consegue justificar as suas escolhas.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Questionar o aluno no sentido de tentar esclarecer quais os valores que pode usar. - Questionar se há alguma limitação sobre o conjunto numérico a usar ou sobre o número que deve usar. - A que animal (incógnita) devem atribuir um valor? O que acontece ao valor do outro animal? Porquê?	- Compreender que se atribuírem valor a uma das incógnitas é possível determinar o valor da outra.

1.4.	**<u>Respostas Previstas:</u>** - Se o crocodilo for €4, por exemplo, então dois elefantes valem 43 - 4 = €39. E cada elefante vale 39:2=€19,5. Pode interpretar que não é possível caso se esperar números inteiros. - Se o crocodilo for €3, por exemplo, então dois elefantes valem 43 - 3 = €40. E cada elefante vale 40:2=€20. - Se outro valor for atribuído ao crocodilo o valor do elefante também será outro, logo há várias hipóteses. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o que é a forma algébrica. - Não compreende como responder, matematicamente, à questão sobre o que é preciso para resolver algebricamente o problema. - Não identifica que precisa de incógnitas.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Que outros valores podem dar ao crocodilo? Podem escolher outro qualquer? Porquê? E o que acontece ao valor do elefante? - Ao compararem esta resposta com a da alínea anterior o que verificam? São diferentes? Como podem explicar essa diferença?	- Compreender que a variação de uma das incógnitas influencia o valor da outra incógnita e, por conseguinte, há mais do que uma solução possível para o problema.
1.5.	**<u>Respostas Previstas:</u>** - Existem várias soluções para este problema. - Cada uma delas depende do valor atribuído ao crocodilo porque basta substituir na equação o seu valor e resolver a equação em ordem ao valor do elefante. Ou fazer as substituições na representação pictórica e resolver de forma intuitiva. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o que é pedido. - Não consegue explicar o raciocínio. - Quantifica apenas as soluções que encontrou nas duas alíneas anteriores, sem reconhecer que existem infinitas soluções.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Reparem nas respostas dadas às questões anteriores. Quantas soluções conseguiram encontrar para o teu problema? Acham que só existem estas duas? Poderá haver mais? Quantas? É possível, neste caso, contabilizar o número de soluções? Porquê? (Pode aparecer a discussão sobre a atribuição de valores negativos aos animais uma vez que podem ser entendidos como peso. Decidir em grande grupo o que se deve considerar uma vez que o enunciado não define "valor").	- Compreender que há infinitas (depende do conjunto considerado) soluções para este problema. - Estender o resultado para todas as equações literais, apenas com enquadramento matemático.

1.6	<u>**Respostas Previstas:**</u> - Se o elefante for €10, por exemplo, então dois elefantes valem €20 e um crocodilo vale 43 - 20 = €23. - Se o elefante for €3, por exemplo, então dois elefantes valem €6 e o crocodilo vale 43 - 6 = €37. - Algebricamente seria: $c= 43 – 2e$. - Existem várias soluções também pois o valor do crocodilo irá depender sempre o valor escolhido para o elefante. <u>**Dificuldades:**</u> - Não compreende o que é pedido. - Não entende que a equação pode ser a mesma que a escrita anteriormente. - Não compreende que conjunto numérico pode ser usado. - Não compreende a pergunta pois inicialmente pedem o elefante, por isso acredita que não podem pedir o valor do crocodilo.	<u>**Professor:**</u> - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. <u>**Apoio a Prestar:**</u> - Que valores podem usar? Que conjunto numérico é recomendado que usem? É feita alguma restrição sobre esse facto? - A equação será diferente da obtida anteriormente? Porquê? Como podes descobrir o valor do crocodilo através dessa equação? - No enunciado solicitam o valor do elefante mas imagina que te pediam o valor do crocodilo e do elefante. O que mudaria na resolução do problema? - Darias um valor a que animal em 1.º lugar? Porquê?	- Compreender que cada equação literal pode ser resolvida em ordem a qualquer das incógnitas presentes.
OBS.			

Discussão em turma	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias de resolução dos colegas. Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**<u>Professor:</u>** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações que possam surgir. **<u>Sequencia a escolher:</u>** - Nestas questões não se haverá uma escolha rigorosa pois irá ser promovido um debate em como chegaram às respostas pois não são esperadas respostas muito díspares. - Caso exista alguma resolução que se distinga, iniciar por essa caso não esteja correta ou finalizar com essa, caso seja completa ou se adeque a uma conclusão do trabalho. **<u>A realçar na discussão:</u>** - Podemos dizer que os valores desconhecidos são incógnitas? - Nas funções as duas variáveis que existem são consideradas dependentes e independentes. Como se explica que aqui não exista essa relação? - Podemos resolver a equação literal em ordem a qualquer uma das variáveis? Porquê isto acontece? - Como distinguir uma função de uma equação literal? - Nas equações literais trabalhamos com variáveis ou com incógnitas?	- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, adquirindo/ reforçando conhecimentos. - Tomar conhecimentos de diferentes estratégias de resolução, verificando as suas potencialidades. - Promover a discussão e a comunicação matemática. - Permitir a introdução do conceito de **equação literal**, de **incógnita** e do **número de soluções** que cada equação pode ter de modo a que a aprendizagem seja significativa.

“Compreendo Equações Literais” - PARTE 2			
Trabalho autónomo: 20 min. + Discussão: 20 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
2.1	**Respostas Esperadas:** **1.ª Estratégia** - Substituem na 2.ª equação o valor da 1.ª e ficam com 43+43+*crocodilo*=93 e assim sabem que crocodilo= 93-2x43= 93-86= 7. Em seguida, na primeira equação sabem que 2 *elefantes*= 43-7 = 36, logo 1 *elefante*= 36:2= 18. Usam representação pictórica ou por meio de esquema para representar os valores (conjunto de 2 elefantes + 1 crocodilo). **2.ª Estratégia** - Escrevem a nova condição na forma algébrica, $3c+4e=93$ e com a anterior $2e+c=43$ verificam que $3c+4e = 93 \Leftrightarrow (2e+c)+(2e+c)+c=93 \Leftrightarrow 43+43+c=93 \Leftrightarrow c = 93 - 2 \times 43= 93-86=7$ e então verificam que $2e+7=43 \Leftrightarrow 2e=43-7 \Leftrightarrow 2e=36 \Leftrightarrow e=36:2=18$. Usam os princípios de equivalência aprendidos no 7.º ano que estão bem compreendidos, de uma forma geral, pelos alunos da turma. **3.ª Estratégia** - Escrevem a nova condição na forma algébrica, $3c+4e=93$. Escrevem a anterior, $2e+c=43$ em ordem a c pois espera-se que tenham compreendido que podem resolver estas equações em ordem a qualquer das incógnitas: $c= 43-2e$. E na nova condição substituem o valor de c: $3\times(43-2e)+4e=93 \Leftrightarrow 129 - 6e+ 4e = 93 \Leftrightarrow -2e=93-129 \Leftrightarrow -2e=-36 \Leftrightarrow 2e=36 \Leftrightarrow e=36:2 \Leftrightarrow e=18$.Usam os princípios de equivalência neste manuseamento algébrico. **4.ª Estratégia** – Tentativa e erro. Se iniciarem no	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se estão a trabalhar e usar o questionamento para que escolham uma estratégia.	- Analisar a diferença entre uma condição e duas e verificar que a introdução de uma nova condição permite que o problema seja solucionado de forma inequívoca. - Averiguar se traduzem o problema, na representação pictórica, para linguagem algébrica e como manuseiam as incógnitas com duas condições.

	c=1 podem chegar ao c=7 e conseguem encontrar a solução ou então é difícil chegar lá e desistem. **Dificuldades:** - Não entender o enunciado. - Não ser capaz de gerir a nova condição. - Não compreender a linguagem pictórica. - Encontrar o valor do crocodilo mas não encontrar o valor do elefante. - Tentar encontrar o valor do elefante sem encontrar o valor do crocodilo. - Manifestar dificuldade na organização da resposta escrita.	**Apoio a Prestar:** - Como podemos resolver este problema? Que tipo de estratégia se pode usar? Esquema? Algébrica? O que preferem? Qual vos parece ser a melhor estratégia? - Que informação vos dá cada condição? Devem usar a informação da 1.ª condição na 2.ª condição? Ou a da 2.ª condição na 1.ª? O que vos parece mais adequado? - Quais os valores desconhecidos? Como os representar? Precisamos de definir as nossas quantidades desconhecidas? Porquê? Como podemos fazer isso?	
2.2.	**Respostas Previstas:** - Existe uma solução neste caso: o crocodilo vale € 7 e o elefante vale € 18. **Dificuldades:** - Não compreender que é pedido que identifiquem o número de soluções. - Não compreender o que é pedido porque na alínea anterior terão encontrado a solução.	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. **Apoio a Prestar:** - O que vos era pedido na alínea anterior? E encontraram? Então esses valores que encontraram correspondem a quê, se falarmos matematicamente? - O que se entende por solução na Matemática? E quantas encontraram na alínea anterior?	- Compreender que quando há duas incógnitas e duas condições haverá uma solução única (neste caso).
	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e	**Professor:** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos	- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos

Discussão em turma	justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias dos colegas. - Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações. **<u>Sequencia a escolher:</u>** - Um par de alunos que tenha usado a linguagem pictórica ou esquemas para obter a resposta. - Um par de alunos que tenha recorrido à forma algébrica para obter a resposta. - Caso se justifique, e caso surja, um par de alunos que tenha usado uma resolução mista entre os esquemas / linguagem pictórica e a forma algébrica. (<u>Alunos em simultâneo no quadro para poupar tempo)</u>. **<u>A realçar na discussão:</u>** - Que relações podem ser estabelecidas entre as várias resoluções que estão no quadro? - Caso não surja a forma algébrica, questionar se é possível recorrer a esta forma para resolver este problema. Sugestões? - Ainda são necessárias incógnitas? Que relação se pode estabelecer com as incógnitas da 1.ª parte da tarefa? São as mesmas? São diferentes? - Neste caso, seria necessário atribuir um valor ao crocodilo? Porquê? Como se explica este facto? - Podem questionar se é sempre assim, se há sempre solução quando há duas condições. Explicar que estamos a analisar este caso e que nas próximas aulas iremos ver outras situações e que responderemos a esta questão. Contudo posso questionar a turma quanto às ideias que têm sobre este assunto.	trabalhados, adquirindo/ reforçando conhecimentos. - Tomar conhecimentos de diferentes estratégias de resolução, verificando as suas potencialidades. - Promover a discussão e a comunicação matemática. -Formalizar a utilização do **símbolo** $\wedge$, de conjugação de condições. - Formalizar a escrita de um **sistema de equações**, com a utilização das chavetas.

FORMALIZAÇÃO DE EQUAÇÃO LITERAL (Utilizar o PPT)	
Conceito	**Registo**

- **<u>Equação Literal</u>**:
  - Uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras.
  - <u>Exemplo</u>: $x+5y=30$
- **<u>Resolver uma equação literal em ordem a uma dada incógnita:</u>**
  - Considera-se apenas essa incógnita como variável dos polinómios envolvidos e as restantes letras como constantes.
  - Resolvem-se como as equações numéricas, utilizando-se os princípios de equivalência aprendidos.
- **<u>Soluções de 1 equação literal:</u>** Existem várias soluções que satisfazem o problema.

FORMALIZAÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES (Utilizar o PPT)	
Conceito	**Registo**

- **<u>Sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas *x* e *y*</u>**:
  - Conjugação de duas equações literais com as mesmas incógnitas. Utiliza-se o símbolo $\wedge$ para representar a conjunção.
  - $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ Com ***x*** e ***y*** incógnitas e ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e ***f*** constantes reais e ***a***, ***b***, ***d***, e ***e*** reais não nulos**.**
  - O sistema acima representado diz-se na **forma canónica**.
  - <u>Exemplo</u>:

    $\begin{cases} 10x+5y=700 \\ x-y=25 \end{cases}$ Está na forma canónica.

    $\begin{cases} 10x=700-5y \\ x=y+25 \end{cases}$ Não está na forma canónica.

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 189 – tarefas 5 e 6 + Manual página 190 – exercícios 2 e 3.

RECURSOS:

EQUAÇÃO LITERAL

UNIDADE 6

EQUAÇÃO LITERAL

É uma equação que se obtém igualando dois polinómios de forma que pelo menos um dos coeficientes envolva uma ou mais letras.

- *Ex*:

$$x + 5y = 30$$
$$3a + 4b = 50$$

EQUAÇÃO LITERAL

- Resolve-se uma equação literal em ordem a um das incógnitas, considerando-a a variável do polinómio.
- As restantes letras são consideradas como constantes.
- Os princípios de equivalência são usados para a resolução de uma equação literal.

- *Ex*:

$$x + 5y = 30 \Leftrightarrow x + 5y - 5y = 30 - 5y \Leftrightarrow x = 30 - 5y$$

- Existem várias soluções para cada equação literal.

SISTEMA DE EQUAÇÕES

UNIDADE 6

SISTEMA DE 2 EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM 2 INCÓGNITAS

- É a conjugação de duas equações literais com as mesmas incógnitas.
- Utiliza-se o símbolo "$\wedge$" para representar a conjunção ou o símbolo "$\{$":

- *Ex*:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Com ***x*** e ***y*** incógnitas e ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e ***f*** constantes reais e ***a***, ***b***, ***d***, e ***e*** reais não nulos.

SISTEMA DE 2 EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM 2 INCÓGNITAS

- O sistema pode estar na forma canónica ou não.

- *Ex*:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 700 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

Está na forma canónica.

$$\begin{cases} 10x = 700 - 5y \\ x = y + 25 \end{cases}$$

Não está na forma canónica.

ANEXO XI – Planificação e recursos da Aula 2 – 29 de abril de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 2 – 29/abril/2016 – 90 min.
"Planear Escadas com a Matemática" + "Prova de Atletismo" – Realização de duas tarefas exploratórias.

OBJETIVOS GERAIS
- Consolidar o conceito de equações literais e analisar se compreenderam que apenas para uma equação literal existem infinitas soluções possíveis. - Verificar, por substituição dos valores sugeridos, qual dos pares é solução das duas equações. - Escrever a solução como um par ordenado. - Interpretar uma situação problemática em contexto real por meio de linguagem gráfica e linguagem natural. - Interpretar geometricamente a solução de um sistema de equações num contexto real.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação das tarefas; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões 1 e 2; *(iv)* Discussão coletiva das questões 1 e 2 e consolidação do conceito de equação literal verificando que cada solução é um par ordenado; *(v)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução da questão 3; *(vi)* Discussão coletiva da questão 3 e síntese sobre a representação gráfica de sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas. *(ix)* Síntese – com registo no caderno diário.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta. - Projetor e documentos para projetar, quadro e marcadores. - Régua de quadro. Os alunos também devem trazer pequenas réguas para a aula.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Representação gráfica de sistemas de equações - Realização da tarefa "Planear Escadas com a Matemática".

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - QUESTÕES 1 E 2 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm 20 minutos para a tarefa 1 e que depois será feita a discussão a nível da turma (15 minutos). Esclarecer os alunos que, durante a discussão, **não podem** fazer correções às suas resoluções**. Devem fazer as correções no caderno diário.**

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÕES 1 E 2 (20 min)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir.

4.º DISCUSSÃO DA QUESTÕES 1 E 2 (15 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário.

5.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÃO 3 (20 min)
Distribuir a 2.ª folha do enunciado da tarefa, com a questão 3, e informar que dispõem de 20 min para a sua resolução. Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas.

6. º DISCUSSÃO DA QUESTÃO 3 + SÍNTESE (20 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário. **Formalizar:** - Quais os pares ordenados que são solução do sistema. - Que a representação de cada uma das equações do 1.º grau é uma reta e que a solução é o ponto (par ordenado) resultante da interseção das retas.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

<table>
<tr><th colspan="4">"PLANEAR ESCADAS COM A MATEMÁTICA" - QUESTÃO 1 E 2</th></tr>
<tr><th colspan="4">Trabalho autónomo: 20 min. + Discussão: 15 min.</th></tr>
<tr><th>Questão</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades</th><th>Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção</th><th>Objetivos e avaliação</th></tr>
<tr><td>1</td><td><u>Respostas Previstas:</u>
<u>1.ª Estratégia</u> - Substituir os valores e= 19 cm e c= 27 cm nas duas equações literais e verificar qual delas é satisfeita, ou seja, qual das duas situações resulta numa igualdade verdadeira. Assim:
- Comodidade: $c - e = 12 \Leftrightarrow 27 - 19 = 12 \Leftrightarrow 8 = 12$ Falso.
- Segurança: $c + e = 46 \Leftrightarrow 27 + 19 = 46 \Leftrightarrow 46 = 46$ Verd.
- Conclui-se que é verificada a relação da segurança.

<u>2.ª Estratégia</u> – Substitui um dos valores de uma das incógnitas nas duas equações literais e encontra o valor da outra incógnita, verificando aquela que resulta no outro valor proposto no enunciado. Assim:
- Comodidade: $c - e = 12 \Leftrightarrow c - 19 = 12 \Leftrightarrow c = 12+19 \Leftrightarrow c= 31 \neq 27$. Não é verificada a relação da comodidade.
- Segurança: $c + e = 46 \Leftrightarrow c + 19 = 46 \Leftrightarrow c = 46-19 \Leftrightarrow c=27$ É verificada a relação da segurança pois o valor de c dado é de 27 cm.
<u>OU</u>
- Comodidade: $c - e = 12 \Leftrightarrow 27 - e = 12 \Leftrightarrow -e = 12-27 \Leftrightarrow -e=-10 \Leftrightarrow e=10 \neq 27$ Não é verificada a relação da comodidade.
- Segurança: $c + e = 46 \Leftrightarrow 27 + e = 46 \Leftrightarrow e = 46-27 \Leftrightarrow e=19$ É verificada a relação da segurança pois o</td><td><u>Professor:</u>
- Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.</td><td>- Compreender que para verificar se um par ordenado é solução basta substituir as suas componentes nas relações matemáticas dadas.
- Compreender que um par ordenado pode ser solução de uma dada equação mas que não é de outra.
- Compreender que se não é solução das duas equações, então não é solução do sistema de equações.</td></tr>
</table>

	valor de *e* dado é de 19 cm. - Conclui-se que é verificada a relação da segurança. **3.ª Estratégia** – Cálculos mentais e justificação escrita em linguagem natural. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido ou o enunciado do problema. - Não compreender como substituir os valores dados. - Substituir os valores numa equação e concluir que a outra é verificada sem fazer a verificação. - Usar incorretamente os princípios de equivalência.	**Apoio a Prestar:** - O que nos explica o enunciado do problema? - Quais as relações são consideradas para a construção de escadas? - Como são traduzidas matematicamente essas relações? - Quais os valores desconhecidos? O que representam as letras usadas nessas relações? - Agora, transpondo a informação dada no enunciado para a questão 1, o que significam as medidas dadas, 19 cm e 27 cm? - Como poderemos trabalhar estas medidas nas relações dadas no enunciado do problema? - Qual é a pergunta que nos é feita? Já somos capazes de responder? E porquê? A justificação que devemos apresentar é escrita ou através de cálculos?	
2.1.	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** - Substituir os valores *e*= 16 cm e *e*= 17 cm nas duas equações literais e analisar os resultados obtidos para a incógnita *c*. Assim: Pai do João: - Comodidade: $c - e = 12 \Leftrightarrow c - 16 = 12 \Leftrightarrow c = 28$ cm - Segurança: $c + e = 46 \Leftrightarrow c + 16 = 46 \Leftrightarrow c = 30$ cm - Conclui-se que não é possível *e*= 16 cm porque obtém-se dois valores distintos para a incógnita *c*. João: - Comodidade: $c - e = 12 \Leftrightarrow c - 17 = 12 \Leftrightarrow c = 29$ cm	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Compreender que substituindo uma incógnita nas equações literais obtemos um valor para a outra incógnita que nem sempre é a solução nas duas equações. - Compreender que para obter a solução do problema é necessário que o par ordenado seja

	- Segurança: $c + e = 46 \Leftrightarrow c + 17 = 46 \Leftrightarrow c = 29$ cm - Conclui-se que é possível *e*= 17 cm porque obtém-se o mesmo valor de *c* nas duas equações, *c*= 29 cm. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Não compreender ou ter dificuldade na leitura do enunciado. - Ter dificuldade em substituir apenas um valor, podendo estar à espera de outro valor pois pode estabelecer comparação com a alínea anterior. - Não considerar a resolução dupla da questão, ou seja, não considerar a resolução para o valor dado pelo pai e outra para o valor dado pelo João. - Interpreta os dois valores dados para o espelho como sendo um do cobertor, ou seja, considera *e*= 16 cm e *c*= 17 cm, e obtém uma solução errada do problema.	**Apoio a Prestar:** - O que nos diz o enunciado? O que pretende construir o pai do João? Os degraus são todos iguais? E qual a incógnita que nos dão? Então passamos a ter quantos valores desconhecidos? E como vamos descobrir esse valor desconhecido? - Qual das equações escolher? Uma delas ou as duas? - Uma só, porquê? Qual das relações o pai do João quer ver verificada, a comodidade ou a segurança? Se são as duas, porque devemos considerar apenas uma das relações? - Se vamos considerar as duas relações, comodidade e segurança, devemos proceder como agora que sabemos o valor do espelho?	solução das duas equações em simultâneo.
2.2.	**Respostas Previstas:** - Reconhece que a solução encontrada na alínea anterior é a dada pelo João e que ao valor de *e*=17cm corresponde um valor de *c*= 29 cm. - Indicar como par ordenado: (17, 29) ou (29,17). **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Não compreender ou ter dificuldade na leitura do enunciado. - Interpreta de modo erróneo o enunciado e Identifica o par ordenado como sendo (16, 17). - Não compreende que deve considerar a resposta da alínea anterior e não responde porque espera ter que	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **Apoio a Prestar:** - O que é um par ordenado? - E, neste caso, existe um par ordenado que satisfaça as duas equações? Qual é? Onde o obtiveste? E como se indica, corretamente, um par ordenado? - Qual a ordem a considerar? - <u>Caso indique (16, 17):</u> No enunciado do problema os	- A escrita da solução como um par ordenado (x, y). - Que a variação do par ordenado tem a ver com a escolha das variáveis que se consideram para os eixos das abcissas e das ordenadas, respetivamente.

	proceder a outros cálculos algébricos para obter a resposta.	valores 16 cm e 17 cm estão associados a que incógnita? Será, então, possível considerar os dois como estando no mesmo par ordenado? Qual dos dois é solução encontrada para a incógnita *e*? E quando esse valor é considerado nas duas equações, qual o valor de *c*? Então como será escrito o par ordenado que corresponde à solução do problema?	
Discussão em turma	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias de resolução dos colegas. Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **Considerações de carácter geral:** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**Professor:** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações que possam surgir. **Sequencia a escolher:** **Questão1:** - 1.ª Escolha: Substituição dos dois valores nas duas incógnitas e obtenção de proposições verdadeiras e falsas, escolhendo qual a relação que é verificada. - 2.ª Escolha: Substituição de uma das incógnitas para obtenção da outra, escolhendo aquela que se obtém o mesmo valor de *c* nas duas equações. -3.ª Escolha: Outra resolução que possa surgir e que seja interessante para a turma. **Questão 2.1:** - 1.ª Escolha: Quem apenas tenha substituído o valor de e= 16cm numa ou nas duas equações e concluiu que seria o João e não o pai (resolução incompleta). - 2.ª Escolha: Substituição dos valores de e dados nas duas equações e obtenção do valor de *c*. **Questão 2.2:** - Discussão oral da escrita de um par ordenado e da solução.	- Consolidar o conceito de equações literais e analisar se compreenderam que apenas para uma equação literal existem infinitas soluções possíveis. - Verificar, por substituição dos valores sugeridos, qual dos pares é solução das duas equações. - Escrever a solução como um par ordenado.

		A realçar na discussão: - O que é uma equação literal? Quantas incógnitas são necessárias para que a equação seja considerada literal? - Como posso saber se um conjunto de valores é solução de uma equação? Quantas soluções admitem uma equação literal? E se foram duas equações literais? - Se soubermos o valor de uma incógnita como posso chegar ao valor da outra? - Como representar a solução do sistema de duas equações?	

“Compreendo Equações Literais” - QUESTÃO 3			
Trabalho autónomo: 20 min. + Discussão: 20 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
3.1	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Analisando o gráfico e os dados do problema, verifica-se que o segmento de reta [AD] corresponde ao desempenho da Rita, que começou com um avanço de 200m, e o segmento de reta [BC] ao do Gustavo. Analisando as coordenadas dos pontos C e D, verifica-se que: - têm a mesma ordenada: 2000m, que equivale à conclusão da prova. - C tem 500 s como abcissa e D tem 600 s como abcissa, ou seja, o Gustavo chegou 100 s mais cedo que a Rita pois o ponto C representa o momento em que o Gustavo concluiu a prova. **2.ª Estratégia** – Em vez de analisarem apenas o facto de a Rita ter iniciado com 200 m de avanço, estabelecendo a correspondência com as coordenadas do ponto A(0,200), também analisam o	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Analisar os dados representados graficamente por comparação dos elementos fornecidos em linguagem natural na descrição do problema. - Saber justificar a resposta com base nos elementos fornecidos em linguagem natural e gráfica.

	declive das retas pois o declive da reta do Gustavo é maior porque a velocidade é maior. E por comparação das abcissas dos pontos C e D, chegam a conclusão que o Gustavo conseguiu ganhar a prova. R: O Gustavo conseguiu vencer a prova, chegando 100 s mais cedo que a Rita, **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente e não ser capaz de fazer a leitura correta do gráfico. - Não identificar as coordenadas dos pontos representados nos gráficos. - Não fazer a correspondência entre os dados do problema e os segmentos de reta representados no gráfico ou fazer uma correspondência errada. - Trocar o ponto C com D e atribuir, erradamente, o segmento de reta [AC] ao desempenho da Rita e o [BD] ao desempenho do Gustavo.	 **<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que nos diz o enunciado escrito que devemos ter em atenção na leitura do gráfico? - Como se deve fazer a leitura dos gráficos? No eixo das abcissas, da esquerda para a direita ou o contrário? - Qual dos pontos iniciais corresponde à situação inicial da Rita? E do Gustavo? Porquê? - Depois de se saber qual dos segmentos de reta corresponde à situação da Rita, o que devemos fazer para saber quando é que ela terminou a prova? - Então, qual o ponto que corresponde ao momento em que a Rita terminou a prova? E o Gustavo? Quais as coordenadas desses pontos? - O que têm em comum os pontos C e D? E qual a diferença? Que conclusões se podem retirar desta análise?	

3.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – A leitura do gráfico permite fazer uma *aproximação*, com utilização de uma régua, de que ao ponto de abcissa 400 s corresponde a ordenada 1400 m. Apesar da Rita não partido do início da pista, a leitura é direta pois ela fez 1200m de pista mas partiu com um avanço de 20m, logo está a uma distância de 1400m do início da pista. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Com recurso à informação em linguagem natural podem ter em conta que a Rita percorre 3 metros por segundo, logo em 400 s faz 400x3= 1200m. Mas parte com 200 metros de avanço, logo ela está a 1200 m + 200 m = 1400 m do início da pista. **<u>3.ª Estratégia</u>** – Com recurso a uma expressão algébrica, os alunos traduzem a distância que a Rita percorreu em função do tempo, ou seja, f(x)= 3x + 200. Obtendo a imagem de 400s: f(400)= 3x400+200 = 1400m, chegam à conclusão que a Rita está a uma distância de 1400 m do início da pista. **<u>4.ª Estratégia</u>** – Construindo uma tabela que contenha diversos valores de tempo e os respetivos valores da distância percorrida, podem chegar à conclusão que aos 400 s, a Rita percorreu 1400 m em relação ao início da pista (somando os 200 m do avanço).	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer que a cada valor do eixo das abcissas corresponde um valor do eixo das ordenadas por meio da respetiva função.

	<u>Dificuldades:</u> - Não compreender o que é pedido. - Fazer a leitura no referencial de forma trocada (eixos). - Escolher o segmento de reta que corresponde ao desempenho do Gustavo e não ao da Rita e dar como resposta 1600 m. - Fazer uma leitura errada e atribuir outro valor diferente do esperado. -Não considerar que a Rita tinha 200 m de avanço.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que é pedido? Onde se deve fazer a leitura dos 400 s? Em qual dos eixos? Corresponde às abcissas ou às ordenadas? - Essa abcissa tem uma ordenada que lhe corresponde por meio da função que representa o desempenho da Rita? Como fazer a leitura? - Qual o valor obtido da ordenada? E qual a variável que está representada no eixo das ordenadas? - Mas a Rita partiu com 200 m de avanço, a resposta obtida já considera esse avanço? Porquê?	
3.3.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – A leitura do gráfico permite uma resposta imediata fazendo corresponder ao ponto de ordenada 1500 m uma abcissa de 450 s, leitura aproximada. Mas a Rita tem um avanço de 200 m por isso para ela fazer 1500 m é necessário considerar 1500 m+ 200 m = 1700 m, logo f(x)=1700 m corresponde a x=500 s. É uma estimativa com base no gráfico, sem rigor. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Com recurso à linguagem natural do enunciado, considera-se que aos 1500 m adicionam-se os 200 m de avanço para ter a distância efetiva de 1500 m percorridos pela Rita, ou seja, estaria a 1700 m de distância relativa ao início da pista e, assim, pensa-se no valor de x que corresponde a 1700 = 3x+200. Logo x=1500:3= 500. **<u>3.ª Estratégia</u>** – Com recurso a uma expressão algébrica, traduz-se a distância que a Rita percorreu em função do tempo, ou seja, f(x)= 3x + 200.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer que a cada valor do eixo das ordenadas corresponde um valor do eixo das abcissas por meio da respetiva função.

	Obtendo o objeto que tem de imagem 1500 + 200, porque a Rita parte com 200 m de avanço, logo para fazer os 1500 m reais de distância é necessário somar o avanço que leva. Assim: $f(x)= 1700 \Leftrightarrow 3x+200 = 1700 \Leftrightarrow x= (1700-200):3 =$ 500 s. Chega-se à conclusão que a Rita percorreu 1500 m em 500 s. **<u>4.ª Estratégia</u>** – Construindo uma tabela que contenha diversos valores de tempo e os respetivos valores da distância percorrida, podem chegar à conclusão que aos 500 s, a Rita percorreu 1700 m em relação ao início da pista (somando os 200 m do avanço aos 1500 para ter 1500m de distância percorrida). **<u>5.ª Estratégia</u>** – Pensando que se pretende a distância efetivamente percorrida pela Rita, e não distância ao início da pista, pode-se pensar que partindo do zero e percorrendo 3 metros por segundo, então a Rita demora 500 s a fazer os 1500 metros pois 1500= 3x500. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Fazer a leitura no referencial de forma trocada (eixos). - Escolher o segmento de reta que corresponde ao desempenho do Gustavo e não ao da Rita e dar como resposta aproximada 350 s. - Fazer uma leitura errada e atribuir outro valor diferente do esperado. - Não considera o avanço de 200 m da Rita.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que é pedido? Onde se deve fazer a leitura dos 1500 m? Em qual dos eixos? Corresponde às abcissas ou às ordenadas? - Mas para a Rita fazer de facto 1500 m de percurso, qual a ordenada que devemos verificar? Se y=1500 m qual foi a distancia efetivamente percorrida pela Rita, considerando o avanço de 200 m? - Então devemos considerar que valor na ordenada? - Essa ordenada tem uma abcissa que lhe corresponde por meio da função que representa o desempenho da Rita? Como fazer a leitura? - Qual o valor obtido da abcissa? E qual a variável que está representada no eixo das abcissas? - As questões devem ser colocadas para qualquer uma das estratégias previstas.	

3.4.	**Respostas Previstas:** - O ponto E representa o ponto de interseção dos segmentos de reta que traduzem os desempenhos da Rita e do Gustavo. No contexto do problema, representa o momento em que o Gustavo alcançou a Rita na prestação da prova, nas condições indicadas. No ponto E estão os dois amigos à mesma distância e com o mesmo tempo gasto. Coordenadas: E(200, 800). **Dificuldades:** - Não compreender que é pedido. - Não identifica que é o ponto de interseção dos segmentos de reta. - Apenas identifica o significado do ponto na perspetiva matemática e não no contexto do problema. - Não identifica as coordenadas ou escreve-as na ordem inversa.	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **Apoio a Prestar:** - Qual te perece ser o aspeto mais relevante do ponto E? É um ponto qualquer? A qual dos dois segmentos de reta ele pertence? - Se pertence aos dois, o que é ele na perspetiva matemática? - E no contexto do problema? Analisando as representações gráficas, nos valores das abcissas antes da do ponto E, quem ia à frente? E nos valores posteriores, quem ia à frente? O que aconteceu neste momento? - Como escrever as coordenadas de um ponto? A ordem é importante? Qual deve ser?	- Identificar o ponto de interseção de duas retas, identificas as suas coordenadas e interpretar o seu significado no contexto do problema.
3.5.	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Aplicando a matéria dada anteriormente, identifica a expressão algébrica de cada uma das retas (cujos segmentos de reta estão representados no gráfico): $\begin{cases} y = 3x + 200 \\ y = 4x \end{cases}$ E substitui as coordenadas do ponto E obtidas graficamente, E (200, 800): $\begin{cases} 800 = 3 \times 200 + 200 \\ 800 = 4 \times 200 \end{cases}$ E obtém duas igualdades verdadeiras, confirmando que as coordenadas do ponto E são (200, 80).	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer que um ponto de coordenadas conhecidas é solução de um sistema de duas equações se verifica as duas equações em simultâneo.

3.5.	**<u>2.ª Estratégia</u>** – Aplicando a matéria dada anteriormente, identifica a expressão algébrica de cada uma das retas (cujos segmentos de reta estão representados no gráfico): $\begin{cases} y = 3x + 200 \\ y = 4x \end{cases}$ Reconhece que pode igualar os valores de y obtido por cada uma das equações, logo: $4x = 3x + 200 \Leftrightarrow x = 200$ e assim obtém o valor de y: $y = 4 \times 200 = 800$, determinando as coordenadas do ponto E, u seja, E (200, 800). **<u>3.ª Estratégia</u>** – Resolve algebricamente, apesar de não saber usar as formalidades algébricas corretas, e encontra a solução do sistema, as coordenadas do ponto E. Coordenadas do ponto E (200, 800). $\begin{cases} y = 3x + 200 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 200 = 4x \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 200 = 4x - 3x \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 4 \times 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 800 \end{cases}$ **<u>4.ª Estratégia</u>** – Construindo uma tabela que contenha diversos valores de tempo e os respetivos valores da distância percorrida pela Rita e pelo Gustavo (3 linhas) procura um tempo em que a distância dos dois amigos seja comum. Assim, encontra que aos 200 s, a distância dos dois amigos era de 800 m e chega às coordenadas do ponto E (200, 800).		- Reconhecer que a solução de um sistema de equações corresponde ao ponto de interseção das duas retas que também se pode analisar graficamente.

3.5.	**5.ª Estratégia** – Utilização da calculadora gráfica para obtenção do ponto de interseção das duas retas com rigor. Encontra as expressões algébricas e insere-as. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Tem dificuldade em atribuir o mesmo y e o mesmo x às duas equações uma vez que se tratam de dois segmentos de reta distintos. Por analogia às funções podem usar letras distintas. - Não representar o sistema com a formalidade algébrica que se pretende, apesar de não ser solicitado o sistema. - Não substitui as coordenadas corretamente. - Substitui as coordenadas do ponto E apenas numa das equações e tira as conclusões. - Não conclui se o ponto E é solução do sistema. - Caso opte pela resolução algébrica não formal, pode cometer erros na aplicação dos princípios de equivalência ou nas substituições (analisar cada caso, em situações de erro). - Pode construir o sistema e não saber como se resolve pois não sabe resolver algebricamente um sistema.	**Apoio a Prestar:** - O gráfico de cada desempenho corresponde a que entidade matemática? - Um segmento de reta está contido numa entidade matemática infinita? Qual? - Como se escreve a expressão algébrica de uma reta? - Quantas retas existem neste caso? Estão relacionadas no contexto do problema? - Como se deve escrever, matematicamente, um sistema de duas equações? - O que é a solução de um sistema de equações? - Como se pode averiguar se um dado ponto é solução de um sistema de equações? - Quais as substituições a fazer? Em qual das equações? - Chegando a duas igualdades verdadeiras, o que se deve concluir? O ponto E é ou não solução do problema? - Caso exista problemas nas resoluções algébrica, analisar cada caso e questionar a aplicação dos princípios de equivalência (em cada situação) ou das substituições.	

Discussão em turma	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias dos colegas. - Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **Discussão em turma** **<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**<u>Professor:</u>** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações. **<u>Sequencia a escolher:</u>** **<u>Questão3.1, 3.2, 3.3 e 3.4:</u>** - Discutir oralmente a situação questionada e ouvir os vários contributos, colocando-os à consideração de toda a turma. No final fazer um apanhado e fornecer, oralmente, uma resposta clara e esclarecedora da situação. - No final da questão 3.4 escrever no quadro as coordenadas do ponto E. **<u>Questão3.5:</u>** 1.ª Escolha: O aluno que tenha feito por leitura do gráfico e tenha construído o sistema de duas equações para verificação algébrica das coordenadas lidas no gráfico. 2.ª Escolha: Um aluno que tenha feito por tabela. Chegando à conclusão do par de coordenadas comuns nos dois amigos. 3.ª Escolha: Um aluno que tenha construído o sistema e tenha tentado resolver de uma forma algébrica, ainda que rudimentar. **<u>A realçar na discussão:</u>** - Estabelecer relação com os conhecimentos anteriores sobre gráficos de funções e solicitar que identifiquem que tipo de funções são as do exercício. - Neste caso, quantas soluções podemos identificar para o sistema de equações? E podemos ter essa	- Reconhecer que a solução de um sistema de equações corresponde ao ponto de interseção das duas retas que também se pode analisar graficamente. - Alertar as dificuldades inerentes ao processo gráfico caso seja feito manualmente (falta de rigor e conclusões erradas), carecendo de verificação algébrica. - Reconhecer que uma solução de um sistema corresponde ao ponto cujas coordenadas verificam as duas condições em simultâneo.

		certeza pela representação gráfica ou pelas substituições das coordenadas no sistema de equações construído? Realçar a falta de rigor quando se constrói um gráfico, razão pela qual é um método que necessita de cuidados e verificação. - Realçar que as soluções dos sistemas de equações, no geral, são os pontos de interseção das suas representações gráficas. - Uma vez que apenas vamos trabalhar, nesta unidade, como equações do 1.º grau, espera-se que os gráficos sejam sempre retas. - E as retas, quando se intersetam, como as da tarefa, quantos pontos de interseção têm? - Alertar, caso se verifique oportuno ou caso surja a questão, para as outras situações, realçando as posições relativas de duas retas que podemos ter. As que são paralelas têm quantas soluções? E as que são coincidentes?	

FORMALIZAÇÃO DE SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU (Utilizar o PPT)	
Conceito	**Registo**

- **Solução de um sistema de equações do 1.º grau com duas incógnitas**:
  - Um par ordenado (x0, y0) é solução de um sistema quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x0 e a segunda por y0, se obtêm duas igualdades verdadeiras.
  - Exemplo:

    $\begin{cases} x+y=72 \\ y=2x \end{cases}$ O par ordenado (24, 48) é solução das duas equações porque $\begin{cases} 24+48=72 \\ 48=2\times 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 72=72 \\ 48=48 \end{cases}$

- **Sistemas Equivalentes**:
  - Dois ou mais sistemas dizem-se **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto-solução.

- **<u>Interpretação Geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau</u>**:
    - O conjunto-solução do sistema de equações corresponde ao ponto de interseção das duas retas.

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 197 – exercícios 1 e 2.

RECURSOS

SISTEMA DE EQUAÇÕES

UNIDADE 6

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

- Um **par ordenado (x_0, y_0) é solução de um sistema** quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0, se obtêm duas igualdades verdadeiras.

- *Ex*:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ y=2x \end{cases}$$

O par ordenado (24, 48) é solução do sistema:

$$\begin{cases} 24+48=72 \\ 48=2\times 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 72=72 \\ 48=48 \end{cases}$$

Obtiveram-se duas igualdades verdadeiras.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES EQUIVALENTES

- Dois ou mais sistemas dizem-se **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto-solução.

- *Ex*:

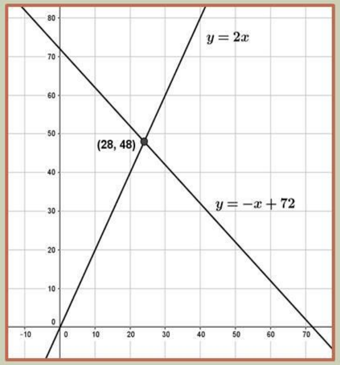
$$\begin{cases} x+y=72 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+72 \\ y=2x \end{cases}$$

O par ordenado (24, 48) é solução dos dois sistemas.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- O conjunto-solução do sistema de equações corresponde ao **ponto de interseção das duas retas**.

O par ordenado (24, 48) é solução dos dois sistemas.



ANEXO XII – Planificação e recursos da Aula 3 – 02 de maio de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 3 – 02/maio/2016 – ENTREVISTAS - 45 min.
"Aplico o que Aprendi 1" – Realização de uma tarefa com duas questões seguida de entrevista.

OBJETIVOS GERAIS
- Aplicação e consolidação da matéria dada com recolha de dados da turma toda e com entrevistas aos pares escolhidos. - Tarefa 1: Problema com contexto da vida real dado em linguagem natural. Objetivo: Analisar a interpretação de dados do problema sem dar a definição das incógnitas, no sentido de analisar que significados os alunos atribuem às letras em questão. Promover um manuseamento simples e algébrico com a substituição de uma das incógnitas. - Tarefa 2: Problema com contexto geométrico e dados indicados na figura. Objetivo: Analisar como manuseiam a informação disponibilizada no contexto da geometria. Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação da tarefa; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões 1 e 2;

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Resolução da tarefa "Aplico o que aprendi 1".

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - QUESTÕES 1 E 2 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm os restantes 40 minutos para a realização das duas questões da tarefa. Esclarecer os alunos que não haverá discussão desta tarefa e que será entregue na próxima aula com feedback.

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÕES 1 E 2 (restantes 40 min.)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir.

4.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS – Recolha dos enunciados
Recolher as resoluções dos alunos para entregar com feedback.

5. º ENTREVISTAS – APÓS
Entrevistas semiestruturas feitas aos pares escolhidos e com autorização dos Encarregados de Educação.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

“APLICO O QUE APRENDI 1” - QUESTÕES 1 e 2			
Trabalho autónomo: 40 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1.1	**Respostas Previstas:** Expressão 15*d* - O valor 15 corresponde ao comprimento do tijolo na posição deitada. - A letra *d* corresponderá a uma das incógnitas do problema que é o número de tijolos na posição deitada existente no comprimento medido do muro. - A expressão 15*d* corresponde à parcela do comprimento do muro referente apenas aos tijolos na posição deitada. Expressão 15*d*+16*p* - A parcela 6*p*, por analogia à expressão anterior, corresponde à parcela do comprimento do muro referente aos tijolos na posição em pé. - A expressão completa, 15d + 6*p* corresponde ao comprimento total do muro. **Dificuldades:** - Não compreender o enunciado. - Não compreender que a letra *d* assenta na lógica de ser a primeira letra da palavra “*deitados*” nem a letra *p*. - Não identificar que a leitura dos 15 cm deverá ser feita na figura 1 não no enunciado escrito. - Não atribuir os significados pretendidos às duas incógnitas. - Fazer confusão com a presença, no enunciado, da 3.ª	**Professor:** - Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **Apoio a Prestar:** - De que objeto noa fala o enunciado do problema? - A construção do muro é feita com tijolos que se posicionam de que modo? - Qual será a lógica em usar as letras *d* e *p*? Como se relacionam elas com as posições referidas em itálico no enunciado? - E o valor 15 cm relaciona-se com qual das posições? E, por sua vez, essa posição está relacionada com que letra? - Está correto relacionar o 15 com a letra d e o 6 com a letra p? Então qual o significado de cada parcela?	- Interpretar os dados do problema sem dar a definição das incógnitas. - Analisar que significados os alunos atribuem às letras em questão. -Promover um manuseamento simples e algébrico com a substituição de uma das incógnitas.

	incógnita, a letra c.	- E qual será o significado das duas parcelas juntas, da soma dessas parcelas?	
1.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhecer e traduzir para linguagem matemática os dados do problema, ou seja: *c*= 420 cm e *d*= 18 tijolos na posição deitada. - Substituir estes valores nas incógnitas do problema: $420 = 15 \times 18 + 6p \Leftrightarrow 420 = 270 + 6p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 450 - 270 = 6p \Leftrightarrow 150 = 6p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p = \frac{150}{6} \Leftrightarrow p = 25$ tijolos R: A D. Rosa utilizou 25 tijolos na posição em pé. **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhecer e traduzir para linguagem matemática os dados do problema, ou seja: c= 420 cm e d= 18 tijolos na posição deitada. - Reconhecer que são 18 tijolos deitados, logo a parcela do muro que corresponde aos tijolos deitados tem de comprimento: 15x18= 270 cm. Ao comprimento total do muro, 420 cm, têm que retirar o valor anteriormente determinado: 420 -270 = 150 cm que corresponde à parcela do comprimento do muro dos tijolos em pé. Uma vez que cada tijolo em pé tem 6 cm de largura, então 150 cm correspondem a 150:6= 25 tijolos na posição em pé. R: A D. Rosa utilizou 25 tijolos na posição em pé. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado. - Não identificar que valores atribuir a que incógnitas. - Trocar as incógnitas e os respetivos valores. - Não efetuar os princípios de equivalência.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Quais os dados que o enunciado desta alínea nos dá? - Matematicamente conhecemos que incógnitas? - Então que passo tomar em seguida? O enunciado inicial do problema fornece que informação já traduzida em linguagem matemática? - Vimos, na alínea anterior, qual o significado dessa equação. Então, como devemos proceder se	-Promover um manuseamento simples e algébrico com a substituição de uma das incógnitas. - Enquadrar face ao contexto a resposta numérica obtida.

<table>
<tr><td></td><td>- Erros algébricos.
-Ter dificuldade na escrita da resposta ou na organização dos cálculos.
- Não responde corretamente face ao contexto.</td><td>conhecemos duas quantidades que antes não conhecíamos?
- O valor obtido como resposta, como deve ser interpretado? Responde à questão colocada? Então como proceder para responder e ara explicar a estratégia escolhida? Cálculos ou palavras ou ambos?</td><td></td></tr>
<tr><td>2.1.</td><td><u>Respostas Previstas:</u>
- Reconhece o dado do enunciado e escreve P= 20 cm.
- Reconhece que o perímetro do retângulo é dado ela soma de todos os lados e escreve:
$P=2(x+2)+2y$
- Substitui o valo de P na equação e desenvolve os cálculos algébricos simples recorrendo aos princípios de equivalência:
$20=2(x+2)+2y \Leftrightarrow \frac{20}{2}=\frac{2(x+2)}{2}+\frac{2y}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10=(x+2)+y \Leftrightarrow 10-2=x+y \Leftrightarrow x+y=8$
<u>Ou:</u>
$20=2(x+2)+2y \Leftrightarrow 20=2x+4+2y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20-4=2x+2y \Leftrightarrow 16=2(x+y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{16}{2}=\frac{2(x+y)}{2} \Leftrightarrow 8=x+y \Leftrightarrow x+y=8$

<u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o que é pedido.
- Não compreender o enunciado.
- Não calcular corretamente o perímetro do retângulo, indicando, por exemplo, apenas os dois lados com identificação na figura.
- Não aplicar corretamente os princípios de equivalência no manuseamento algébrico da equação com duas incógnitas.
- Não reconhece a forma canónica da equação literal.</td><td><u>Professor:</u>
- Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.

<u>Apoio a Prestar:</u>
- Qual das figuras referem nesta línea? O perímetro de 20 cm refere-se a qual das figuras?
- Como se determina o perímetro de uma figura geométrica? E de um retângulo? Como posso escrever algebricamente uma equação que traduza esse problema matematicamente?
- Existem incógnitas nessa equação? Quantas? Quais?
- O que é a forma canónica de uma equação literal?</td><td>- Analisar como interpretam e traduzem a informação disponibilizada no contexto da geometria.

-Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas.</td></tr>
</table>

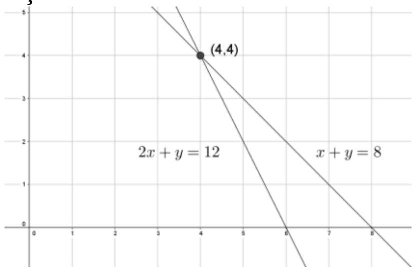
	- Faz confusão entre as letras usadas para os vértices do retângulo e as usadas nos monómios para expressas as medidas do comprimento e da largura.	Que tipo de cálculos se deve efetuar? Com base em que conhecimentos? - O que representam as letras R, U, M e O? O que representa *x+2* e *y*? Representam a mesma entidade matemática? Quais delas devem ser consideradas para a resolução do problema? As do 1.º conjunto, as do 2.º ou ambas?	
2.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Escolhe dois valores para *x* (ou para *y* ou um para *x* e outro para *y*) e determina os valores dos comprimentos e das larguras usando a equação da alínea anterior, na forma canónica. Por exemplo, uma solução é dada por: Se $x = 2\ cm$ Então: $8 = 2 + y \Leftrightarrow y = 8 - 2 \Leftrightarrow y = 6\ cm$ R: $c = 2 + 2 = 4\ cm$ e $l = 6\ cm$ E a outra solução: Se $y = 2\ cm$ Então: $8 = x + 2 \Leftrightarrow x = 8 - 2 \Leftrightarrow x = 6\ cm$ R: $c = 6 + 2 = 8\ cm$ e $l = 2\ cm$ **<u>2.ª Estratégia</u>** – Escolhe um valor para o comprimento e determina o valor de x. Substitui o valor de x na equação na forma canónica e encontra o valor de y, ou seja, da largura. Repete o processo com outro valor para o comprimento ou atribui um valor à incógnita y, tal como indicado na 1.ª estratégia. Assim, escolhe 3 cm para o comprimento e verifica por substituição ou por cálculos mentais que $x = 1\ cm$.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Analisar como interpretam e traduzem a informação disponibilizada no contexto da geometria. - Reconhecer que numa equação literal existem mais do que uma solução possível.

	Logo $8=1+y \Leftrightarrow y=8-1 \Leftrightarrow y=7\ cm$ R: $c=3\ cm$ e $l=7\ cm$ **<u>3.ª Estratégia</u>** – Qualquer um dos procedimentos anteriores mas, em vez de utilizar a equação na forma canónica, utiliza a expressão do perímetro antes de simplificar e faz os manuseamentos algébricos feitos com as incógnitas **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado. - Não identificar que tipo de soluções são pedidas. - Não ter em atenção que o perímetro é 20 cm e atribuir quais valores ao comprimento e à largura. - Não utilizar a expressão na forma canónica da alínea anterior e repetir os cálculos iniciais. - Encontrar apenas uma solução para cada medida e não duas como e pedido no enunciado.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Que tipo de soluções nos pede o enunciado? Temos que obedecer à condição da alínea anterior, em que o perímetro é igual a 20 cm? Porquê? Faria sentido solicitar duas medidas sem obedecer a uma condição? - E que condição é essa? Uma medida depende da outra? Existe alguma expressão ou equação que podemos usar? Que informação nos deu a alínea anterior? É útil? Podemos usá-la? Como? - Se encontrares um valor para o x e outro para o y, a resposta está completa? A questão fica respondida? Então o que e preciso fazer para encontrar a resposta completa?	
2.3.	**<u>Respostas Previstas:</u>** - Traduz a informação dada no enunciado em que o perímetro do triângulo e do retângulo são iguais, ou seja, $P_{triângulo} = P_{retângulo}$ =20 cm. - Escreve a expressão do perímetro do triângulo, reconhecendo que é isósceles e que tem dois dos seus	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Analisar como interpretam e traduzem a informação disponibilizada no

	lados iguais, por observação na figura: $P_{triângulo} = 2(x+4)+y$ - Substitui o valor de P e tem $20 = 2(x+4)+y$. **<u>1.ª Estratégia</u>** – Substitui os valores de *x* e *y* encontrados na alínea anterior e verifica se obtém igualdades verdadeiras: <u>1.ª Solução</u>: *x= 2 cm* e *y= 6 cm* $20 = 2(2+4)+6 \Leftrightarrow 20 = 16+6 \Leftrightarrow 20 = 22$ Falso <u>2.ª Solução</u>: *x= 6 cm* e *y= 2 cm* $20 = 2(6+4)+2 \Leftrightarrow 20 = 20+2 \Leftrightarrow 20 = 22$ Falso R: Nenhuma das soluções encontradas é solução desta equação. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Substitui os valores de *x* e encontra o valor de y, verificando se corresponde ao mesmo valor de y encontrado na alínea anterior. <u>1.ª Solução</u>: Se *x= 2 cm* $20 = 2(2+4)+y \Leftrightarrow 20 = 16+y \Leftrightarrow y = 4\ cm \neq 6\ cm$ Não é igual ao valor encontrado anterior. <u>2.ª Solução</u>: Se *x= 6 cm* $20 = 2(6+4)+y \Leftrightarrow 20 = 20+y \Leftrightarrow y = 0\ cm \neq 2\ cm$ Não é igual ao valor encontrado anterior. R: Nenhuma das soluções encontradas é solução desta equação. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o enunciado. - Não compreende que o perímetro do triângulo é 20 cm - Não reconhece as propriedades de um triângulo	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Qual a figura geométrica que agora estamos a	contexto da geometria. -Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas. - Verificar que as solução de uma equação literal nem sempre são solução das duas equações consideradas para o problema.

	isósceles. - Não interpreta a figura do triângulo com a simbolização dos dois lados de igual comprimento. - Não escreve a nova equação literal ou escreve-a com as três incógnitas, P, x e y sem reconhecer que P= 20 cm. - Não compreende como pode verificar se as soluções anteriores são solução da nova equação. - Não conclui corretamente se as soluções escolhidas anteriormente são ou não solução da nova equação.	considerar? Qual a propriedade dessa figura que nos e dada no enunciado escrito ou e também figura? - Como se determina o perímetro de um triângulo? E deste triângulo em particular? Qual a expressão? - É-nos dado o valor da medida do perímetro deste triângulo? Qual é esse valor? E como gerir esta informação com a que acabaste de escrever? - Quantas incógnitas tem a nova equação? São as mesmas que as do retângulo [RUMO]? E quais as soluções encontradas para o retângulo? Devemos ir buscar os valores de *x* e de *y* ou do comprimento e da largura? - Como podemos ver se esses valores são solução nesta nova equação? Se forem, o que devemos esperar? - O que se esperava, aconteceu? O que devemos concluir? Qual a resposta à pergunta feita?	
2.4.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que tem duas equações das alíneas anteriores e junta-as de modo a ter uma conjunção de condições: $x+y=8 \quad \wedge \quad 20=2(x+4)+y$ <u>*Ou*</u> $\begin{cases} x+y=8 \\ 20=2(x+4)+y \end{cases}$ **<u>2.ª Estratégia</u>** – Reconhece que tem duas equações das alíneas anteriores mas indica a 2.ª na forma canónica como está a 1.ª. Assim: $20=2(x+4)+y \Leftrightarrow 20=2x+8+y \Leftrightarrow 20-8=2x+y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x+y=12$ E escreve o sistema de duas equações:	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Analisar como interpretam e traduzem a informação disponibilizada no contexto da geometria. -Manuseamento algébrico em função

	$x+y=8 \wedge 2x+y=12$ <u>*Ou*</u> $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=12 \end{cases}$ **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o enunciado. - Não compreende que sistema de equações deve construir. - Não reconhece que são as equações / condições das alíneas anteriores.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que é um sistema de equações? - Quantas equações deve ter? E quantas incógnitas tem? - O que tem sido trabalhado até aqui? - Quantas equações já construímos nas alíneas anteriores? Relativas a que figuras geométricas? E a que característica dessas figuras? - Podemos ou não construir um sistemas com equações em que as incógnitas estejam relacionadas? - Como representar esse sistema?	das duas incógnitas. - Reconhecer a escrita formal de um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.
	<u>Respostas Previstas:</u> **<u>1.ª Estratégia</u>** – Uma forma de encontrar as medidas das figuras geométricas referidas, de tal modo que ambas tenham o mesmo perímetro (P= 20 cm), é encontrar as soluções do sistema de equações e substituir nas expressões dadas. Podemos ir tentando encontrar um par ordenado (x, y) que seja solução das duas equações. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Outra forma é representar geometricamente cada uma das equações. As equações do 1.º grau representam retas e o ponto de cruzamento	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Analisar como interpretam e

2.5.	das duas retas corresponde à solução do sistema, um par ordenado (x, y). Substituem-se os respetivos valores nas expressões que representam as medidas das figuras. **<u>3.ª Estratégia</u>** – Utilizar a representação geométrica para mostrar a solução:  **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado. - Não compreender que é apenas para explicar como encontrar a solução. - Não reconhecer o que é a solução de um sistema. - Não reconhecer a solução do problema (contexto).	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que é uma solução de um sistema de duas equações do 1.º grau? Como representamos? - Como proceder para encontrar esse par ordenado? Quais as condições que devemos ter em conta? Devemos considerar um par ordenado que verifique apenas um das condições ou as duas em simultâneo? - Como descobrir esse par? É único? - Esse par ordenado é também, neste contexto, a resposta ao que é pedido? Porquê? O que devemos fazer para encontrar as medidas das figuras que nos são pedidas?	traduzem a informação disponibilizada no contexto da geometria. - Reconhecer como encontrar a solução de um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 202 – exercício 2 + página 203 exercícios 1 e 2.

GUIÃO DA ENTREVISTA DA 3.ª AULA DA INTERVENÇÃO LETIVA:	
QUESTÃO 1	- O enunciado do problema foi claro? - Qual a dificuldade maior na leitura do enunciado? <u>QUESTÃO 1.1:</u> - Ao ler a equação $c=15d+6p$, as letras usadas fizeram sentido no contexto do problema? - O que significa cada uma delas? - Analisar as respostas e questionar algum detalhe que se mostre relevante. <u>QUESTÃO 1.2:</u> - Ao ler o enunciado desta nova situação, que sentido atribuiu à frase "o comprimento do muro é 420cm". A unidade foi bem escolhida? Em metros seria mais fácil de compreender o contexto? - O que significa "18 tijolos deitados"? O que vale 18 no contexto matemático do nosso problema? - Qual o teu raciocínio para encontrar a resposta?
QUESTÃO 2	- O enunciado do problema foi claro? - Qual a dificuldade maior na leitura do enunciado? - Qual o significado das letras R, U, M, O, P, A e Z? - Qual o significado das letras x e y? - Alguma diferença deve ser realçada pelo tipo de representação (maiúsculas / minúsculas)? <u>QUESTÃO 2.1:</u> - Como pensaste para encontrar a equação literal? - Quantas incógnitas foram usadas? O que elas representam neste contexto? <u>QUESTÃO 2.2:</u> - Como procedeste para encontrar as duas soluções possíveis? <u>QUESTÃO 2.3:</u> - Como interpretaste "tem o mesmo perímetro do retângulo?" - A nova condição usa as mesmas incógnitas do que a anterior? Porquê? <u>QUESTÃO 2.4:</u> - Qual o significado do sistema de equações construído? - As duas equações podem ser usadas para qualquer outro valor de perímetro? <u>QUESTÃO 2.5:</u> - Como procedeste para encontrar as medidas das duas figuras geométricas? - É suficiente encontrar os valores de x e de y? Porquê?

ANEXO XIII – Planificação e recursos da Aula 4 – 04 de maio de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 4 – 04/maio/2016 – 90 min.
"Interpretação Geométrica de Sistemas de Equações" – Realização de uma tarefa exploratória com 3 questões.

OBJETIVOS GERAIS
- Compreender a representação na forma canónica de uma equação literal e compreender os manuseamentos algébricos para o fim pretendido. - Saber representar graficamente um sistema de duas equações do 1.º grau num um referencial cartesiano. - Compreender que para saber que um par ordenado é solução, basta substituir cada uma das incógnitas pelo valor sugerido. - Interpretar graficamente que a solução de um sistema de equações do 1.º grau corresponde ao ponto de intersecção (x, y) das duas retas. - Classificar os sistemas de equações do 1.º grau: (i) possível e determinado, (ii) possível e indeterminado e (iii) impossível. - Saber interpretar a equação de um reta e em função da sua representação gráfica e a partir destas construir sistemas de equações possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação das tarefas; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões 1 e 2; *(iv)* Discussão coletiva das questões 1 e 2; *(v)* Síntese – formalização da classificação de sistemas de duas equações quanto ao número de soluções com registo no caderno diário. *(vi)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução da questão 3; *(vii)* Discussão coletiva da questão 3 e síntese sobre a representação gráfica de sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta. - Projetor e documentos para projetar, quadro e marcadores. - Geogebra para o professor e máquina calculadora gráfica para os alunos

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Realização da tarefa "Interpretação geométrica de sistemas de equações".

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - QUESTÕES 1 E 2 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho com utilização da calculadora gráfica. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm 30 minutos para as questões 1 e 2, seguida de uma discussão a nível da turma (15 minutos). Esclarecer os alunos que, durante a discussão, **não podem** fazer correções às suas resoluções**. Devem fazer as correções no caderno diário.**

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÕES 1 E 2 (30 min)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir. A utilização da calculadora gráfica é livre e permitida caso queiram. As professoras deverão auxiliar a utilização desta nas resolução das tarefas.

4. º DISCUSSÃO DA QUESTÃO 1 e 2 (15 min.) + SÍNTESE (10 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário. **Formalizar:** - Classificação de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas em: (i) sistema possível e determinado; (ii) sistema possível e indeterminado; (iii) sistema impossível.

5.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÃO 3 (15 min)
Distribuir a 2.ª folha do enunciado da tarefa, com a questão 3, e informar que dispõem de 15 min para a sua resolução. Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Os alunos poderão utilizar, livremente, a calculadora gráfica nas suas resoluções.

6.º DISCUSSÃO DA QUESTÃO 3 (10 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário.

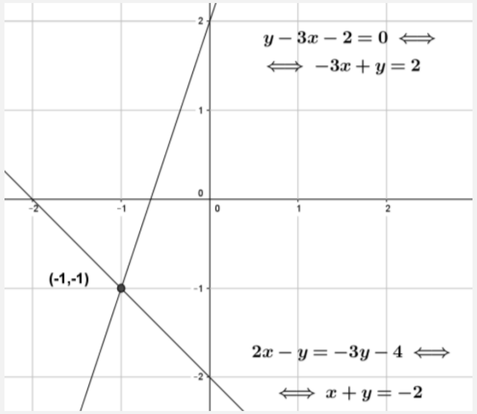
DESENVOLVIMENTO DA AULA

<table>
<tr><th colspan="4">“INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES” - QUESTÃO 1</th></tr>
<tr><th colspan="4">Trabalho autónomo: 30 min. + Discussão: 15 min + Síntese: 10 min</th></tr>
<tr><th>Questão</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades</th><th>Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção</th><th>Objetivos e avaliação</th></tr>
<tr><td>1.1.</td><td><u>Respostas Previstas:</u>
<u>1.ª Estratégia</u> – Recorrendo ao manuseamento algébrico com aplicação dos princípios de equivalência:
$\begin{cases} 2x-y=-3y-4 \\ y-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3y=-4 \\ -3x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=-4 \\ -3x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ -3x+y=2 \end{cases}$

<u>1.ª Estratégia</u> – Recorrendo ao manuseamento algébrico com aplicação dos princípios de equivalência mas sem o formalismo de um sistema. Escreve cada uma das equações na forma canónica e constrói o sistema no final ou utiliza o símbolo da conjunção de condições.

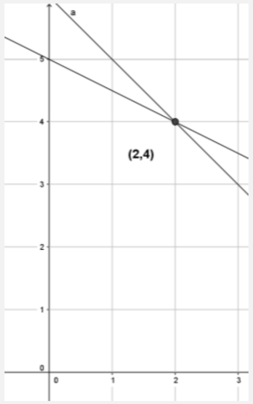
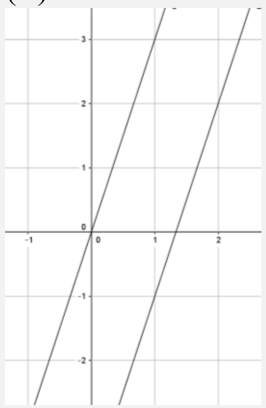
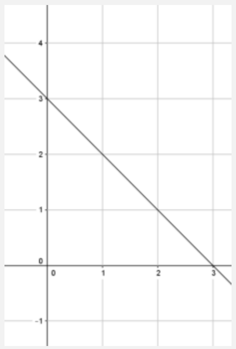
<u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o enunciado do problema.
- Não reconhece o que é a “forma canónica”.
- Não compreende o formalismo algébrico no manuseamento das duas equações e não aplica corretamente a chaveta como símbolo de conjunção de condições e/ou o sinal de equivalente entre cada passo.
- Usar incorretamente os princípios de equivalência.</td><td><u>Professor:</u>
- Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.

<u>Apoio a Prestar:</u>
- O sistema já está na forma canónica? Alguma das equações está?
- O que é a forma canónica? É necessário saber qual o nosso objetivo para saber qual o passo seguinte.
- O que fazer para escrever este sistema na forma canónica? Que tipo de manuseamentos pode fazer?
- Existem monómios semelhantes? Quais as incógnitas das equações?
- Cada passo que se avança, temos sistemas equivalentes? Porquê? O que deve acontecer para que sejam sistemas equivalentes? Assim sendo, qual o símbolo que se deve escrever entre esses sistemas?
- Como devemos escrever formalmente os sistemas de duas equações? Que símbolo usar para representar a conjunção das duas condições?</td><td>- Compreender a representação na forma canónica de uma equação literal e compreender os manuseamentos algébricos para o fim pretendido.</td></tr>
</table>

1.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>**  **<u>1.ª Estratégia</u>** – Fazer uma tabela com substituição de valores para cada uma das equações: x+y= -2 ⇔ y= -x -2 -3x+y= 2 ⇔ y= 3x +2 x= 0 y= -2 x= 0 y= 2 x=1 y= -3 x=1 y= 5 x= -1 y= -1 x= -1 y= -1 **<u>2.ª Estratégia</u>** – Reconhece para cada caso o valor de b, ou seja, da ordenada na origem. Posteriormente pela substituição obtém outro par ordenado que seja solução. Com dois pontos traça as respetivas representações gráficas – retas. **<u>3.ª Estratégia</u>** – Utiliza a máquina de calcular gráfica e introduz as equações das retas na forma canónica, utilizando os resultados da alínea anterior. Obtém um gráfico semelhante ao descrito na 1.ª estratégia.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Saber representar graficamente um sistema de duas equações do 1.º grau num um referencial cartesiano. -Saber manusear a calculadora gráfica para representar graficamente retas. - Saber interpretar, graficamente, que o ponto resultante da interseção das retas corresponde ao par ordenado que é solução do sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

	$\begin{cases} x+y=-2 \\ -3x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2-x \\ y=2+3y \end{cases}$ **R:** O par ordenado (-1, -1) é solução do sistema. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Não compreender ou ter dificuldade na leitura do enunciado. - Ter dificuldade em elaborar as representações gráficas. - Ter dificuldade em manusear a calculadora gráfica e não reconhecer que deve usar a equação da reta do tipo y= ax + b. - Não identificar o ponto de interseção dos gráficos como sendo a solução do sistema. - Não respeitar a ordem do par ordenado. - Não escrever o par ordenado que é solução.	**Apoio a Prestar:** - O que nos diz o enunciado? Para descobrir graficamente alguma reposta o que precisamos de ter? Um referencial com que características? - E para considerar esse referencial cartesiano com rigor o que precisamos de fazer? Construí-lo ou usar a calculadora gráfica? Este recurso tecnológico neste momento será mais útil que desenhar o referencial cartesiano na folha de resposta? - Se quiserem desenhar a vossa resposta, depois de usarem o recurso, podem apenas esboçar uma aproximação do gráfico de modo a dar uma ideia de como é o gráfico que obteve na calculadora. Descrevendo os procedimentos e, claro, não esquecendo que será apenas um esboço de uma representação gráfica obtida com um recurso que nos dá rigor. - Como introduzir na calculadora as equações de cada uma das retas? Lembram-se? Deve ser y=…., ou seja, é uma equação de uma reta na forma y= ax + b. O que representa a? E o que representa b? - Depois de traçadas as duas representações gráficas das retas, o que podemos concluir? As retas são paralelas? São concorrentes? - O que se pode concluir quanto à solução do sistema de equações? Quantos pares ordenados são solução deste sistema de equações? Porquê? O que te permite concluir qual os pares ordenados que são solução? - Qual as coordenadas desse par ordenado?	

1.3.	<u>**Respostas Previstas:**</u> <u>**1.ª Estratégia**</u> – Reconhece que a solução encontrada na alínea anterior é solução do sistema de equações por substituição das coordenadas do par ordenado $(x,y)=(-1,-1)$ pois obtém duas igualdades verdadeiras: $\begin{cases}(-1)+(-1)=-2\\-3\times(-1)+(-1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=-2\\3-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=-2\\2=2\end{cases}$ <u>**2.ª Estratégia**</u> – Resolver algebricamente o sistema de duas equações, sem o formalismo do método de substituição, e chega à solução: $\begin{cases}x+y=-2\\-3x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2-x\\y=2+3x\end{cases}\Leftrightarrow -2-x=2+3x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x-3x=2+2\Leftrightarrow -4x=4\Leftrightarrow x=-\frac{4}{4}=-1$ $x=-1,$ então y=-2-(-1)= -2+1=-1 Logo a solução é $(x,y)=(-1,-1)$. <u>**Dificuldades:**</u> - Não compreender o que é pedido com o termo “algebricamente” e não reconhecem que devem fazer a substituição dos valores das incógnitas. - Obter na alínea anterior um par ordenado diferente do esperado e verificam que não é solução do sistema de equações por substituição algébrica, obtendo um resultado não esperado e, neste caso, colocam em causa que a interseção das retas seja a solução procurada.	<u>**Professor:**</u> - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. <u>**Apoio a Prestar:**</u> - O que é um par ordenado? - E, neste caso, existe um par ordenado que satisfaça as duas equações? Qual é? Onde o obtiveste? E como se indica, corretamente, um par ordenado? Qual o valor de *x* e o de *y*? - Caso o par ordenado seja diferente de (-1, -1) e obtiverem duas igualdades falsas, questionar qual seria o resultado esperado? O que obtiveram? Então vamos averiguar o que pode estar errado. - Houve algum erro de cálculo no manuseamento algébrico após a substituição dos valores das incógnitas? Se sim, rever e corrigir. Se não, partir ara um erro na alínea anterior. - Será que o par ordenado encontrado graficamente é mesmo a solução do sistema de equações? Vamos rever os procedimentos da alínea anterior e verificar se houve algum erro procedimental. Se sim, retificar e repetir a substituição de valores nas duas equações até obter duas igualdades verdadeiras.	- Saber escrever a solução como um par ordenado (*x*, *y*). - Compreender que, para saber que um par ordenado é solução de um sistema de equações, basta substituir cada uma das incógnitas pelo valor sugerido.

2.1.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Utiliza a calculadora gráfica e obtém os gráficos seguintes: (A)  (B)  (C)  (A) O sistema corresponde a duas retas concorrentes oblíquas com um ponto de interseção. Esse ponto tem coordenadas (2, 4) e é a solução do sistema de equações.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Interpretar graficamente que a solução de um sistema de equações do 1.º grau corresponde ao ponto de intersecção (x, y) das duas retas. - Consolidar as posições relativas das retas e comparar cada situação com o número de soluções de um sistema.

	(B) O sistema corresponde a duas retas estritamente paralelas e, por isso, as retas não se cruzam. Não há ponto de interseção das retas, logo não há solução. (C) O sistema corresponde a duas retas paralelas coincidentes e, por isso, as retas têm infinitos pontos em comum. Existem infinitas soluções para os sistemas de equações. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Ter dificuldade em elaborar as representações gráficas. - Ter dificuldade em manusear a calculadora gráfica e não reconhecer que deve usar a equação da reta do tipo y= ax + b. - Não identificar o ponto de interseção dos gráficos como sendo a solução do sistema. - Não respeitar a ordem do par ordenado. - Não identificar as duas retas paralelas coincidentes devido à sobreposição. - Não ser capaz de descrever o que observa.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Como representar graficamente a equação de uma reta utilizando a calculadora gráfica? - Os sistemas encontram-se na forma canónica? É suficiente para manusear as equações na calculadora? Como introduzir a equação da reta para obter o seu gráfico na calculadora? Sim, é do tipo y= ax+b. Então o que devemos fazer? Que tipo de manuseamento algébrico? É importante descrever esta parte do trabalho? - O que observas no visor da calculadora? Que tipo de gráficos? Era o esperado? Porquê? E quais as posições relativas dessas retas? Quantos pontos em comum existem? Quais as coordenadas? - O que é importante realçar no que observas? Matematicamente o que te parece importante realçar? O que temos vindo a discutir nas aulas anteriores?	
2.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que nos três sistemas os gráficos correspondem a retas. Os gráficos correspondem a funções afins e lineares, não havendo representação da função constante.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Compreender que em cada sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas as representações gráficas correspondem sempre a duas retas que podem ou não cruzar-se.

	<u>Dificuldades:</u> - Não compreender o que é pedido. - Não compreende que apenas se pretende que realcem que os gráficos correspondem a retas.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Que características comuns podem realçar? Quais os gráficos obtidos? Retas? Parábolas? - São funções? De que tipo?	
2.3.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que no sistema (A) existe um ponto de interseção, em (B) as retas são paralelas e não existe nenhum ponto de interseção e em (C) as retas são paralelas coincidentes e que todos os pontos são comuns às duas retas. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não compreender que apenas se pretende que realcem as diferenças nas posições relativas das retas e que identifiquem os pontos de interseção.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Que características distintas podem realçar? - Nas três situações as retas têm a mesma posição relativa com o seu par? Em (A), as retas são…? Em (B) e em (C)? - Quantos pontos de interseção existem em cada situação? - Como indicar as suas coordenadas? É possível em todos os casos? Porquê? Como fazer?	- Analisar as diferentes posições de cada duas retas de cada sistema de equações e comparar com o número de soluções encontradas.
2.4.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que em relação às equações têm três tipos de situações: 1ª É possível determinada: Existe C.S. finito. 2ª É impossível: Não existe conjunto solução. 3ª É possível indeterminada: O C.S. é IR, infinito. <u>Por analogia:</u> (A) é um sistema possível e determinado e tem um ponto de interseção, logo uma solução.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Como classificam as equações? Quais as hipóteses?	- Classificar as equações quanto ao conjunto solução: (i) possíveis e determinadas, (ii) possíveis e indeterminadas e (iii) impossíveis.

	(B) é um sistema impossível porque não há pontos de interseção. (C) é um sistema possível indeterminado porque o conjunto solução é IR, um conjunto infinito. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não reconhecer quais as classificações das equações ou classificar de modo erróneo. - Não estabelecer a comparação com os sistemas e com os pontos de interseção existentes.	- Essa classificação é feita em função de quê? De que característica do conjunto solução? Da extensão? Do número de soluções? - E como podemos estabelecer o paralelo com as três situações desta tarefa? Observando os gráficos e pensando nas diferenças assinaladas, o que encontram de mais saliente? - Então o que propões para cada caso? Supõe que as classificações são as mesas que para as equações, qual a tua sugestão? - Devemos usar o mesmo tipo de classificação? O que é um sistema? É constituído por equações ou não? Faz sentido manter o tipo de classificação?	- Classificar os sistemas de equações do 1.º grau: (i) possível e determinado, (ii) possível e indeterminado e (iii) impossível.
Discussão em turma	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias de resolução dos colegas. Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**<u>Professor:</u>** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações que possam surgir. - Deve ter muita atenção à divisão do quadro nesta discussão para combinar as respostas escritas com a projeção da tarefa no quadro. **<u>Sequencia a escolher:</u>** **<u>Questão1.1:</u>** - 1.ª Escolha: Escolher uma resposta cuja organização não seja a melhor para realçar a importância na organização. - 2.ª Escolha: Escolher uma resposta que se aproxime do modo formal da resolução gráfica de um sistema de equações. **<u>Questão 1.2:</u>** - Solicitar a um aluno que vá responder com o Geogebra e projetar no quadro.	- Consolidar o conceito de solução de um sistema de equações, que se pode obter geometricamente e que se pode verificar algebricamente por substituição dos respetivos valores. - Interpretar geometricamente a solução de um sistema de equações como

		<u>Questão 1.3:</u> - 1.ª Escolha: Substituição algébrica dos valores de *x* e de *y*. **<u>Questão2.1:</u>** - Discutir oralmente em grande grupo as representações e ir escrevendo no quadro, que será dividido em 3 partes, as contribuições mais importantes para cada uma das situações. **<u>Questão 2.2:</u>** - Discutir em grande grupo as características comuns. Se surgirem outros aspetos considerar e validar ou não em conjunto com todos os alunos. **<u>Questão 2.3:</u>** - Discutir em grande grupo as diferenças encontradas. Se surgirem outros aspetos considerar e validar ou não em conjunto com todos os alunos. **<u>Questão 2.4:</u>** - Discutir em grande grupo como se classificam as equações, escrevendo no quadro o resumo das várias contribuições. Solicitar que estabeleçam o paralelo com os sistemas de equações e em simultâneo comparar com os pontos de interseção e verificar quantas soluções há em cada caso. Em todas discussão da questão 2 manter a projeção dos gráficos no quadro e escrever por baixo de cada um as contribuições. **<u>A realçar na discussão:</u>** - Como representar a solução do sistema de equações? - Insistir na substituição dos valores de *x* e de *y* de modo a verificar se um determinado par ordenado é	sendo o par ordenado que resulta da interseção das duas retas que correspondem ao gráfico das duas equações. - Classificar sistemas de equações como possível determinado, impossível e possível indeterminado. - Compreender que as classificações usadas nas equações são as mesmas que as usadas nos sistemas e que são em função do tipo de conjunto solução: finito, infinito ou inexistente (conjunto vazio).

		solução do sistema. - Manuseamento da calculadora gráfica, realçando as vantagens da tecnologia. - Interpretação geométrica de uma solução de um sistema como sendo o ponto de interseção dos gráficos das equações. - Classificação de equações em função do conjunto solução	

FORMALIZAÇÃO DA CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS (Utilizar o PPT) – 10 min	
Conceito	**Registo**

- **<u>Classificação de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas</u>**:
  - **Possível e determinado:**
    - Tem uma única solução.

    - Graficamente:

      → As retas que representam as equações são concorrentes;

      → As retas intersetam-se num único ponto.
  - **Impossível:**
    - Não tem solução.

    - Graficamente:

      → As retas que representam as equações são estritamente paralelas;

      → As retas não se intersetam.
  - **Possível e indeterminado:**
    - Tem uma infinidade de soluções.

    - Graficamente:

      → As retas que representam as equações são paralelas coincidentes;

      → As retas intersetam-se em dois pontos (e, por isso, todos os pontos são comuns).

<table>
<tr><th colspan="4">“INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES” - QUESTÃO 3</th></tr>
<tr><th colspan="4">Trabalho autónomo: 15 min. + Discussão: 10 min.</th></tr>
<tr><th>Questão</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades</th><th>Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção</th><th>Objetivos e avaliação</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td><u>Respostas Previstas:</u>

<u>1.ª Estratégia</u> – Reconhece as expressões de cada tipo de função e associa as afins à expressão ax+b, as lineares a ax e as constantes a a. Observa o gráfico e verifica que: - A reta v corresponde a uma função constante.
- As retas s e t intersetam o eixo das ordenadas no ponto (0, 2) e nestes casos b= 2.
- A reta t tem um declive maior que a reta s.
- A reta r tem declive negativo e por isso a<0 e a ordenada na origem no ponto (0, 5).
- A reta u cruza o eixo das ordenadas num ponto de ordenada negativa.
- As retas s e u têm o mesmo declive.
Assim:
Reta t: $y = x + 2$
Reta v: $y = 4$
Reta s: $y = \frac{1}{2}x + 2$
Reta r: $y = -2x + 5$
Reta u: $y = 0,5x - 2,5$

<u>2.ª Estratégia</u> – Em vez de analisar os diferentes valores de a e de b na equação y= ax + b, utiliza a expressão que permite o cálculo do declive entre dois pontos para determinar a e as coordenadas de um ponto para obter o valor de b.
<u>2.ª Estratégia</u> – Utiliza as coordenadas dos pontos e</td><td><u>Professor:</u>
- Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.</td><td>- Saber interpretar a equação de uma reta em função da sua representação gráfica.

- Analisar os valores dos declive e da ordenada na origem e, por comparação, atribuir cada equação de reta à sua representação gráfica.</td></tr>
</table>

	substitui nas expressões algébricas. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não analisar cada valor do declive e da ordenada na origem e por comparação dos valores e das representações gráficas alcançar a solução final. - Aplicar a expressão do cálculo do declive entre dois pontos e encontrar b por substituição das coordenadas de um ponto conhecido e demorar mais tempo que o previsto na resolução desta equação. - Não reconhecer que nas retas b e d os declives são iguais mas que estão apresentação representações diferentes: a= ½=0,5. - Confundir a reta *a* com a incógnita da equação ax+b.	 **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Como estabelecer a correspondência entre as expressões e as representações gráficas? - Quais os valores que, na equação de uma reta, devem ser analisados e que fazem variar a sua representação gráfica? - Quais os tipos de representações gráficas que conhecem? E a cada tipo corresponde uma determinada expressão algébrica? Vamos pensar sobre elas. - Alguma delas é constante? Qual? Como podemos retirar essa conclusão analisando o gráfico? E a expressão algébrica? Então uma das correspondências é… - E lineares? E afins? Como concluir nestes casos? - Analisando as ordenadas na origem, podemos concluir alguma coisa sobre as expressões? Mas as retas b e c têm a mesma ordenada na origem, como as podemos distinguir? Através da análise do valor do declive? Como?	
3.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>3.2.1</u>** – Sistemas possíveis e determinados: Equações das retas r e s Equações das retas r e t Equações das retas r e u Equações das retas r e v Equações das retas s e t Equações das retas s e v Equações das retas t e u Equações das retas t e v Equações das retas u e v	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Interpretar graficamente que a solução de um sistema de equações do 1.º grau corresponde ao ponto de intersecção (x, y) das duas retas.

	<u>3.2.2</u> – Sistema impossível: Equações das retas s e u **<u>3.2.1</u>** – Sistema possível e indeterminado: Não existe, não há retas coincidentes. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender que é pedido. - Apenas indicar as retas a combinar e não o sistema com a sua apresentação formal. - Não compreender a resposta a dar no caso do sistema possível indeterminado uma vez que não existem retas coincidentes. - Não compreender a classificação de sistemas através da sua representação gráfica	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Qual o modo que temos vindo a aprender para representação de um sistema de equações? - Quantas equações têm vindo a considerar para cada sistema? E a conjunção entre elas, representa-se por meio de um símbolo, qual é? -E a classificação de cada sistema é, tal como das equações, em função do conjunto solução que se obtém. - Se houver uma única solução, o sistema é possível ou impossível? É determinado ou indeterminado? CS é finito (única solução) ou infinito? E a sua representação gráfica qual é? Neste caso as retas são concorrentes? - E se as retas não se cruzarem, ou seja, são estritamente paralelas? Qual o conjunto solução? E neste caso, como se classifica o sistema? - Só nos falta considerar o caso das retas coincidentes. Darão origem a quantos pontos comuns? E quantas soluções existiriam? Então, o sistema diz-se (…)?	- Classificar os sistemas de equações do 1.º grau: (i) possível e determinado, (ii) possível e indeterminado e (iii) impossível.

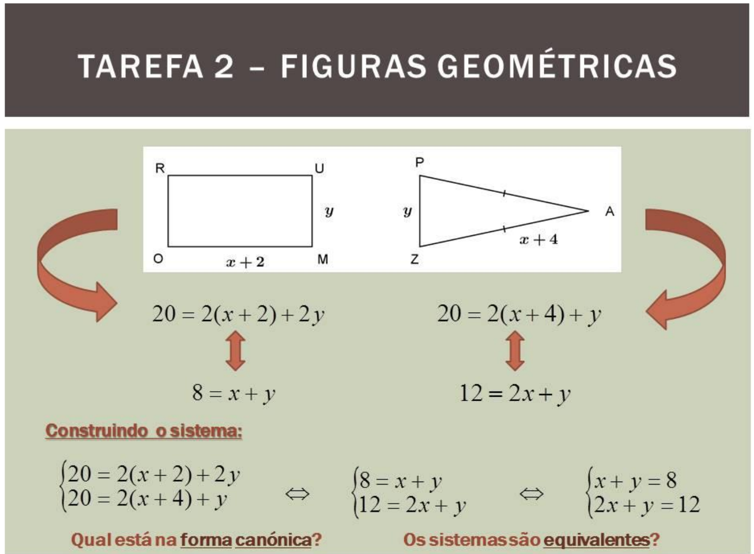
3.3.	**<u>Respostas Previstas:</u>** Sistemas possíveis e determinados: - Soluções encontradas por análise do gráfico: Equações das retas r e s → (1, 3) Equações das retas r e t → (2, 4) Equações das retas s e t → (0, 2) Equações das retas t e v → (2, 4) - Soluções encontradas por cálculos ou calculadora gráfica: Equações das retas r e u → (3, -1) Equações das retas r e v → (1/2, 4) Equações das retas s e v → (4, 4) Equações das retas t e u → (-9, -7) Equações das retas u e v → (13, 4) **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o que é pedido. - Não reconhece que, em algumas situações, a resposta deve ser obtida por observação ao gráfico. - A escolha das equações não permite que a solução seja retirada por observação do gráfico. - Por observação do gráfico, dá uma solução aproximada.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Como se define a solução de um sistema de equações? - Por observação do gráfico, será possível ver as coordenadas dos pontos de interseção? No caso do sistema Construído isso é possível? Como escrever as coordenadas da solução? - Se não for: Se o gráfico da figura não concede certeza à indicação da solução, de que outro modo podemos proceder? Podemos simular os gráficos na nossa calculadora gráfica? E conseguimos a solução? Vamos tentar?	- Interpretar graficamente que a solução de um sistema de equações do 1.º grau corresponde ao ponto de intersecção (x, y) das duas retas.

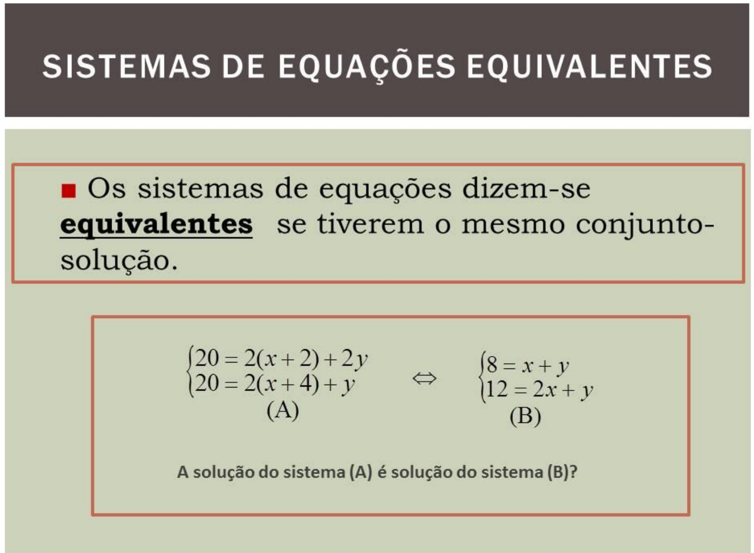
Discussão em turma	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias dos colegas. - Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma. **<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**<u>Professor:</u>** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações. **<u>Sequencia a escolher:</u>** - Discutir oralmente com os alunos qual o melhor modo de chegar à correspondência correta entre as expressões algébricas e os respetivos gráficos. Com a projeção da figura no quadro, escrever ao lado de cada gráfico a expressão correta. Discutir os vários modos de o fazer. - Discutir oralmente quais os sistemas possíveis para cada classificação pedida e ver quais as hipóteses possíveis para cada caso e porquê. - Analisar como podemos retirar a solução por observação do gráfico. Quando não for possível, verificar como podemos proceder para o fazer com rigor. **<u>A realçar na discussão:</u>** - A classificação de sistemas pode ser feita algebricamente ou graficamente por interpretação do conjunto solução resultante da interseção dos gráficos das retas consideradas. - A solução pode ser dada graficamente com algum rigor mas para ter a certeza, substituir nas equações do sistema e verificar que é mesmo a solução (ões) procuradas.	- Interpretar geometricamente os sistemas de duas equações de 1.º grau num referencial cartesiano e reconhecer que ou não possui soluções (sistema impossível), ou uma única solução (sistema possível e determinado) ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema (sistema possível e indeterminado).

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 207 – exercícios5,6 e 7.

RECURSOS:


SISTEMA DE EQUAÇÕES
UNIDADE 6

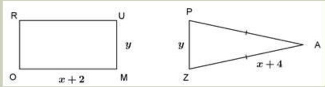

TAREFA 2 – FIGURAS GEOMÉTRICAS
R
U
O
M
y
$x+2$
P
A
Z
y
$x+4$
$20=2(x+2)+2y$
$8=x+y$
$20=2(x+4)+y$
$12=2x+y$
Construindo o sistema:
$\begin{cases}20=2(x+2)+2y\\20=2(x+4)+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8=x+y\\12=2x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=8\\2x+y=12\end{cases}$
Qual está na forma canónica?
Os sistemas são equivalentes?


SISTEMAS DE EQUAÇÕES EQUIVALENTES
Os sistemas de equações dizem-se equivalentes se tiverem o mesmo conjunto-solução.
$\begin{cases}20=2(x+2)+2y\\20=2(x+4)+y\end{cases}$ (A) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}8=x+y\\12=2x+y\end{cases}$ (B)
A solução do sistema (A) é solução do sistema (B)?

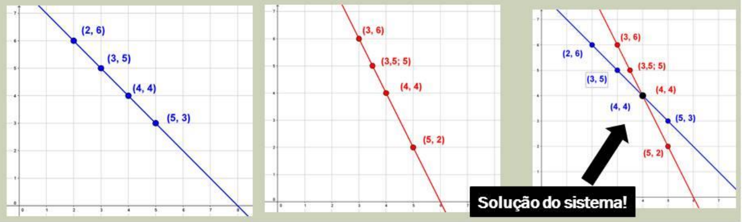
TAREFA 2 – FIGURAS GEOMÉTRICAS

Representando graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$



Quantos pares ordenados são comuns aos dois sistemas?



SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

■ Um **par ordenado (x_0, y_0) é solução de um sistema** quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0, se obtêm duas igualdades verdadeiras.

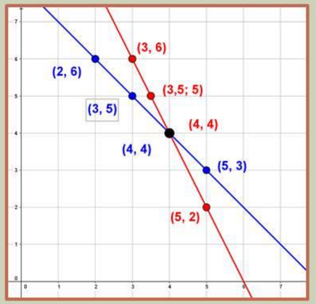
(4, 4) é solução do sistema?

$$\begin{cases} 8 = x + y \\ 12 = 2x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 = 4 + 4 \\ 12 = 2 \times 4 + 4 \end{cases}$$ ☑

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

O **conjunto-solução** de um sistema de duas equações corresponde ao **ponto de interseção das duas retas**.



CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

UNIDADE 6

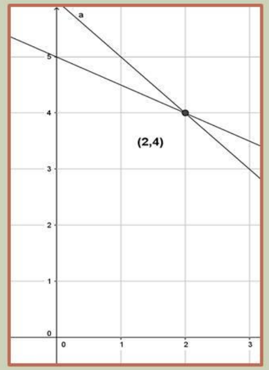
	Sistema (A)	Sistema (B)	Sistema (C)
Declive (a) e Ordenada na origem (b)	a= e b= a= e b=	a= e b= a= e b=	a= e b= a= e b=
Posição relativa das duas retas	Retas concorrentes	Retas estritamente paralelas	Retas paralelas coincidentes
Conjunto solução	1 solução (ponto interseção)	Não há solução	Infinitas soluções
Classificação do sistema	POSSÍVEL E DETERMINADO	IMPOSSÍVEL	POSSÍVEL E INDETERMINADO

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Sistema Possível e determinado:

- Tem uma única solução.

- Graficamente:
  → As retas são concorrentes;
  → Intersetam-se num único ponto.

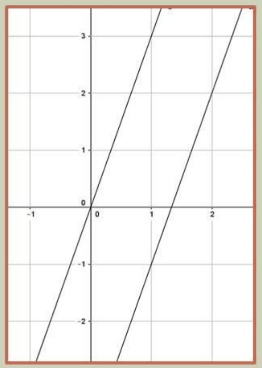


INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Sistema Impossível:

- Não tem solução.

- Graficamente:
  → As retas são estritamente paralelas;
  → Não se intersetam.

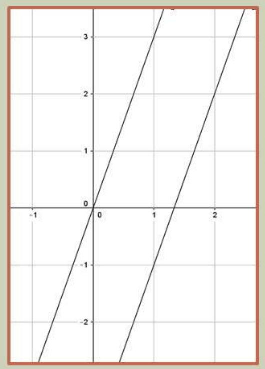


INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Sistema Possível Indeterminado:

- Tem infinitas soluções.

- Graficamente:
  → As retas são paralelas coincidentes;
  → As retas intersetam-se em dois pontos.



ANEXO XIV – Planificação e recursos da Aula 5 – 06 de maio de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 5 – 06/maio/2016 – 90 min.
"Resolvo Sistemas de Equações Algebricamente." – Realização de uma tarefa exploratória com 3 questões.

OBJETIVOS GERAIS
- Identificar graficamente a solução (caso exista) de um sistema de equações, utilizando a calculadora gráfica. - Interpretar a representação gráfica de cada uma das condições e classificar o sistema de equações em função do número de soluções. - Promover a representação gráfica pela utilização da calculadora gráfica e obter como solução, por exemplo, um par ordenado de dízimas infinitas periódicas para que seja obtido um valor arredondado no visor da calculadora gráfica. - Mostrar por substituição que a solução é dada por um par ordenado de números fracionários que têm representação exata por meio de fração. - Procurar que sejam eles a identificar as desvantagens do método gráfico: falta de rigor no traçado do gráfico e solução aproximada com TI. - Promover, de forma intuitiva e pictórica, que façam algumas substituições aritméticas para encontrar a solução do que é pedido. - Solicitar a escrita de um sistema de equações e tentar que resolvam, com substituições algébricas, mesmo que de forma não estruturada. - Resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas – método de substituição. - Compreender os diferentes papéis da simbologia algébrica.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação das tarefas; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões 1 e 2; *(iv)* Discussão coletiva das questões 1 e 2; *(v)* Síntese – formalização da resolução de sistemas de equações pelo método de substituição algébrica, com registo no caderno diário. *(vi)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução da questão 3; *(vii)* Discussão coletiva da questão 3 averiguando se as manipulações algébricas foram compreendidas.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta. - Projetor e documentos para projetar, quadro e marcadores. - Geogebra para o professor e máquina calculadora gráfica para os alunos.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Método de substituição para resolução de sistema de equações – Trabalho a pares.

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - QUESTÕES 1 E 2 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho com utilização da calculadora gráfica apenas para uma das tarefas. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Na fase inicial, tarefa 1, haverá troca de calculadora gráfica ou poderão partilhar a informação com os colegas em grupos de 4. Informar os alunos que têm 30 minutos para as questões 1 e 2, seguida de uma discussão a nível da turma (15 minutos). Esclarecer os alunos que, durante a discussão, **não podem** fazer correções às suas resoluções**. Devem fazer as correções no caderno diário.**

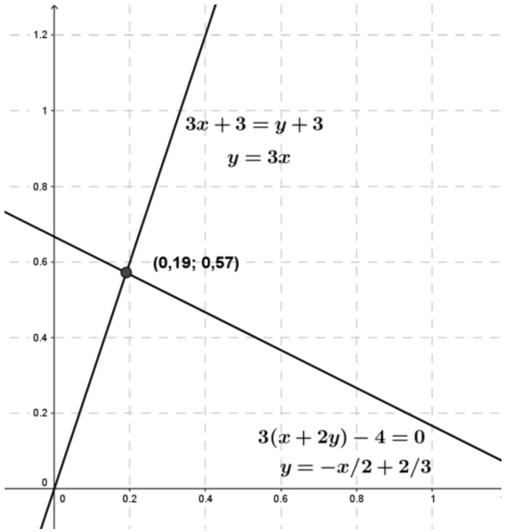
3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÕES 1 E 2 (30 min)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir. A utilização da calculadora gráfica deve ser utilizada na questão 1. As professoras deverão auxiliar a utilização deste recurso.

4. º DISCUSSÃO DA QUESTÃO 1 e 2 (15 min.) + SÍNTESE (10 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário. **Formalizar:** - Método de substituição algébrica para resolução de sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas. - Vantagens e desvantagens da calculadora gráfica na resolução de sistemas de equações.

5.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÃO 3 (15 min)
Distribuir a 2.ª folha do enunciado da tarefa, com a questão 3, e informar que dispõem de 15 min para a sua resolução. Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Os alunos poderão utilizar, livremente, a calculadora gráfica nas suas resoluções.

6.º DISCUSSÃO DA QUESTÃO 3 (10 min)
Promover a discussão em grupo turma com apresentação de diferentes estratégias e esclarecimento das dúvidas que possam surgir. Selecionar as resoluções com base em critérios importantes para promover a discussão em turma. Promover o diálogo entre os alunos e a justificação de cada uma das resoluções. Informar que não devem escrever mais nos enunciados, nem mesmo completar as resoluções. Devem fazer as correções no caderno diário.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

<table>
<tr><th colspan="4">“RESOLVO SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGEBRICAMENTE” - QUESTÕES 1 E 2</th></tr>
<tr><th colspan="4">Trabalho autónomo: 30 min. + Discussão: 15 min + Síntese: 10 min</th></tr>
<tr><th>Questão</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades</th><th>Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção</th><th>Objetivos e avaliação</th></tr>
<tr><td>1.1.</td><td><u>Respostas Previstas:</u>
<u>1.ª Estratégia</u> – Recorrendo à calculadora gráfica, introduzir as equações das retas mas na y= mx + b. É necessário fazer manuseamentos algébricos para obter as equações na forma: $\begin{cases} y=3x \\ y=-\frac{x}{2}+\frac{2}{3} \end{cases}$


Recorrendo às ferramentas da calculadora gráfica, obtém-se as coordenadas do ponto de interseção das duas retas. Obtém-se algo como x= 0,1904761905 e y=0,571428714. Espera-se que indiquem o resultado completo ou (0,19; 0,57) ou uma solução intermédia.</td><td><u>Professor:</u>
- Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.</td><td>- Manusear calculadora gráfica para obter a representação gráfica de um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.
- Reconhecer que os pontos de intersecção das retas correspondem à solução do sistema de equações.
- Escrever, de modo aproximado, as coordenadas do ponto de interseção dado pela calculadora gráfica.</td></tr>
</table>

	Dificuldades: - Não compreender o que é pedido. - Não reconhece que a calculadora apenas introduz expressões algébricas na forma $y= mx + b$. - Tem dificuldade no manuseamento com a calculadora gráfica. - Não consegue determinar as coordenadas do ponto de interseção das duas retas porque não reconhece que é essa a solução ou por dificuldade de manuseamento da calculadora gráfica. - Não indica corretamente ou com coerência (número de casas decimais) as duas componentes das coordenadas.	**Apoio a Prestar:** - As equações do sistema estão prontas para serem inseridas na calculadora gráfica? O que é preciso fazer? - Depois de introduzidas as equações na calculadora, o que devemos fazer para analisar as representações gráficas? Tecla F6. - Quantos pontos de interseção são visualizados neste caso? Então quantas soluções existem para este sistema de equações? - Como fazer para obter as coordenadas deste ponto? Tecla F5 e novamente tecla F5. - Como escrever a resposta? Os valores parecem ser exatos? Então como indicar a solução neste caso? Vamos usar uma aproximação? Qual a que parece mais adequada? Às décimas? Às centésimas? Às milésimas?	
1.2.	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Analisando o gráfico anterior verifica-se que existe uma solução única e bem determinada, por isso este sistema de equações é possível e determinado. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Não tem presente a classificação de sistemas de equações trabalhados na aula anterior. - Não considerar a solução única e bem determinada.	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **Apoio a Prestar:** - Como classificar um sistema de equações? Quais as diferentes hipóteses? - O que distingue a classificação dos diferentes sistemas de equações? Como diferenciá-los? - Quantas soluções tem este sistema de equações? As que foram identificadas na questão anterior? - Existe solução? Então é possível? E a solução está bem determinada? Então qual a classificação a atribuir a este sistema?	- Saber classificar um sistema de equações do 1.º grau com duas incógnitas a partir da análise gráfica e da identificação do número de soluções.

<table>
<tr>
<td>1.3.</td>
<td>
<u>Respostas Previstas:</u>
<u>1.ª Estratégia</u> – Substituir os valores das coordenadas dadas no sistema inicial ou no equivalente encontrado para introduzir na calculadora:
$\begin{cases} \frac{4}{7} = 3 \times \frac{4}{21} \\ \frac{4}{7} = -\frac{4}{21} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7} = \frac{12}{21} \\ \frac{4}{7} = -\frac{4}{42} + \frac{14}{21} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} = -\frac{2}{21} + \frac{14}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} = \frac{12}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \end{cases}$
Obtiveram-se duas igualdades verdadeiras, por isso o par $\left(\frac{4}{21}; \frac{4}{7}\right)$ é solução do sistema dado.

<u>2.ª Estratégia</u> – Resolver algebricamente o sistema de duas equações, sem o formalismo do método de substituição, e chega à solução:
$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x = -\frac{x}{2} + \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 18x = -3x + 4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 18x + 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 21x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \times \frac{4}{21} \\ x = \frac{4}{21} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ x = \frac{4}{21} \end{cases}$
</td>
<td>
<u>Professor:</u>
- Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.
</td>
<td>
- Reconhecer a solução como um par ordenado (x, y).

- Compreender que, para saber que um par ordenado é solução de um sistema de equações, basta substituir cada uma das incógnitas pelo valor sugerido.
</td>
</tr>
</table>

	Logo a solução é $\left(\frac{4}{21};\frac{4}{7}\right)$. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido com o termo "algebricamente" e não reconhecem que devem fazer a substituição dos valores das incógnitas. - Efetuar os cálculos de forma errada. - Aplicar os princípios de equivalência de forma errada. - Não reconhecer quando um par ordenado é solução de um sistema de equações.	**Apoio a Prestar:** - O que é um par ordenado? - Como se deve proceder para saber se um par ordenado é solução de um sistema? Substituir que valores? - O que se obteve? O que devemos concluir? - Analisar eventuais erros de manuseamento algébrico e questioná-los quantos aos mesmos de forma a levá-los a compreender o erro.	
1.4.	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – O par ordenado $\left(\frac{4}{21};\frac{4}{7}\right)$ tem como valores aproximados a solução dada pela calculadora gráfica $(0,19;0,57)$. Conclui-se que nem sempre a calculadora gráfica é vantajosa na busca de uma solução exata. Esta é uma desvantagem da utilização do método gráfico. **Dificuldades:** - Não compreender o que é pedido. - Referir que o sistema afinal tem duas soluções. - Não compreender que tipo de relação se espera e não estabelecer uma estratégia de resolução.	**Professor:** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **Apoio a Prestar:** - O que verificas entre as respostas obtidas nas alíneas 1.1. e 1.3? Os valores estão representados da mesma forma? - Como classificaste o sistema? Quantas soluções se	- Analisar as diferentes representações de um número. - Reconhecer a diferença entre valores aproximados de valores exatos. - Verificar que o método gráfico nem sempre é vantajoso e que o algébrico está sempre presente e que é necessário.

	- Não conseguir efetuar a divisão de 4 por 21 e de 4 por 7.	têm nestes casos? - Então estas duas soluções encontradas representam a mesma solução ou não? Mas têm algumas diferenças? Quais? - O que significa $\frac{4}{21}$? E $\frac{4}{7}$? Que valores representam? Como podemos encontra-los? O símbolo da fração representa que operação matemática?	
2.1.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que: - Em (C) existe duas vezes a situação de (A) e então o peso em (C) é igual a 2x1600 g= 3200 g; - Em (C) existe uma vez a situação de (B) e uma vez a situação de (D), logo os pesos correspondem a: (D)= (C) – (B) = 3200 - 1400 = 1800 g. - Em (D) existem 3 bolas iguais de basquetebol, iguais à de (E), assim: (E)= 1800:3= 600g. - Em (A) existe duas vezes a situação de (E) e uma vez a situação de (F), logo (F) = (A) – 2x(E) = 1600 – 2x600 = = 1600 – 1200 = 400 g. Assim: - Bola basquetebol, (E) = 600 g; - Bola de futebol, (F) = 400 g. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não compreende como deve fazer as substituições pois não reconhece as situações que se repetem nas outras. - Comete erros de cálculos aritméticos ou algébricos. - Caso utilize letras para representar cada uma das bolas, pode trocar as letras e alterar o resultado.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Que características comuns podem realçar? Quais os gráficos obtidos? Retas? Parábolas? - Qual a relação entre (A) e (C)? Quantas gramas existem em (C)? - Qual a relação entre (B), (C) e (D)? Como descobrir o peso das 3 bolas em (D)? - Sabendo o peso das 3 bolas em (D), podemos saber o peso de uma em (E)? Qual é? - Qual a relação entre (A), (E) e (F)? Como descobrir o peso da bola em (F)? - Já temos o peso de cada bola? Qual é? Qual a unidade? - Caso haja erros aritméticos e/ou algébricos, analisar cada caso em particular e usar o questionamento para chegar ao objetivo.	- Compreender as substituições algébricas de forma intuitiva, por esquemas ou aproximações do formalismo algébrico.

2.2.	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Reconhece que as bolas de futebol e basquetebol são as incógnitas e utiliza duas letras para as representar: *f*= peso da bola de futebol e *b* = peso da bola de basquetebol (ou utiliza as habituais letras *x* e *y*). Equaciona cada uma das situações para depois construir o sistema: (A) → f+2b=1600 e (B) → 2f+b= 1400 $\begin{cases} f+2b=1600 \\ 2f+b=1400 \end{cases}$ Resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substitui na outra equação: 2f+b= 1400 ⇔ b=1400-2f Por sua vez, f+ 2(1400-2f) = 1600 ⇔ 2800 – 4f = 1600 ⇔ -4f = 1600 – 2800 ⇔ f = 1600:4 = 400 g Logo, substituindo em ⇔ b=1400-2f ⇔b= 1400 - 2x400= =1400 – 800 = 600 g. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Em vez de não estruturar os cálculos, percebe que pode formalmente resolver o sistema de equações:	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Formalizar a resolução algébrica de sistemas de duas equações. - Compreender as vantagens do método de substituição face à representação gráfica.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\begin{cases} f+2b=1600 \\ 2f+b=1400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=1600-2b \\ 2(1600-2b)+b=1400 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} f=1600-2b \\ 3200-4b+b=1400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=1600-2b \\ -3b=-1800 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} f=1600-2b \\ b=600g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=1600-2\times 600 \\ b=600g \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} f=400g \\ b=600g \end{cases}$

R: Cada bola de basquetebol pesa 600g e cada bola de futebol pesa 400g.
<u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o que é pedido.
- Não reconhecer a formalidade algébrica da construção de um sistema de equações.
- Equacionar outras situações que não a (A) e a (B).
- Não compreender como fazer as substituições. algebricamente ou não saber como organizar os cálculos.
- Não aplicar corretamente os princípios de equivalência ou cometer erros aritméticos.
- Trocar as letras das situações e obter valores diferentes.
- Não dar resposta ao problema no seu contexto.</td>
<td><u>Apoio a Prestar:</u>
- O que nos pede o enunciado? Que situações devem equacionar? O que precisamos para o fazer?
- Como equacionar a situação de (A) e de (B)? Traduz o que está na imagem usando linguagem corrente. Como podes traduzi-lo para matemática?
- Quantas incógnitas vão ter? As incógnitas de (A) são as mesmas que as de (B)? O que representam? Como se denominam?
- Agora que o sistema está construído, podemos resolver uma das equações em ordem a alguma das incógnitas? E podemos substituir na outra equação? É a mesma incógnita? O que obtemos? Com quantas incógnitas ficará a nova equação?
- Depois de obteres o valor de uma das incógnitas, como podes obter o valor da outra? Já usaste as duas equações? Podemos usar a outra?
- Qual deve ser a resposta ao problema no seu contexto?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las.
- Ouvir e respeitar as estratégias de resolução dos colegas.
Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma.</td>
<td><u>Professor:</u>
- Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas.
- Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações que possam surgir.
- Deve ter muita atenção à divisão do quadro nesta discussão para combinar as respostas escritas com a projeção da tarefa no quadro.</td>
<td>- Consolidar o conceito de solução de um sistema de equações,</td>
</tr>
</table>

Discussão em turma **Discussão em turma**	**Considerações de carácter geral:** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**Sequencia a escolher:** **Questão1.1:** - 1.ª Escolha: Escolher um aluno para representar os dados no Geogebra ou, caso haja algum atraso, abrir um ficheiro com as retas já representadas no Geogebra e questioná-los quanto à solução do sistema. Escrever no quadro a solução e discutir qual a melhor representação aproximada. **Questão 1.2:** - Solicitar a um aluno que responda oralmente e discutir com a turma. **Questão 1.3:** - 1.ª Escolha: Escolher um aluno que tenha feito a substituição dos valores nas expressões iniciais e outro nas equações que introduziram na máquina de calcular. Vão ao quadro em simultâneo. **Questão 1.4:** - Solicitar a um aluno que responda oralmente e discutir com a turma os resultados obtidos. **Questão2.1:** - 1.ª Escolha: Escolher 1 ou 2 representações mais interessantes e que tenham maior vantagem para a turma. **Questão 2.2:** - 1.ª Escolha: Escolher uma estratégia que não seja a formalidade desejada e outra que tenha a mesma informação mas de forma organizada como se deseja. **A realçar na discussão:** - Realçar que a máquina de calcular dá valores aproximados em determinadas situações (dízimas finitas periódicas e não periódicas).	que se pode obter geometricamente e que se pode verificar algebricamente por substituição dos respetivos valores. - A interpretação geométrica da solução de um sistema de equações pode ser problemática e considerar-se a solução aproximada em vez da solução exata. - Compreender que a álgebra permite confirmar que um par ordenado é solução de um sistema de equações mas também permite encontrar a solução exata – manuseamentos algébricos, formalismo algébrico. - Compreensão dos manuseamentos algébricos que ocorrem no método de substituição.

		- Realçar que a substituição algébrica é um método que permite ter a certeza se um dado par ordenado é ou não solução do sistema de equações. - Manuseamento da calculadora gráfica, realçando as vantagens da tecnologia mas que também tem inconvenientes que a Álgebra pode ajudar.	

FORMALIZAÇÃO DO MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS (Utilizar o PPT) – 10 min	
Conceito	**Registo**

- **<u>Método de substituição para resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas</u>**:
    - **Utilize-se o exemplo da tarefa 1 (Descobrir o preço do peluche elefante e do crocodilo):**

$$\begin{cases} 2elefantes + 1crocodilo = €43 \\ 3elefantes + 3crocodilos = €93 \end{cases}$$

Seja *e* o valor do preço do elefante e *c* o valor do preço do crocodilo, tem-se:

$$\begin{cases} 2e + 1c = 43 \\ 3e + 3c = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ 3e + 3c = 93 \end{cases}$$

Resolvendo cada uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substituindo uma na outra tem-se:

$$\begin{cases} 2e + c = 43 \\ 4e + 3c = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 2e \\ 4e + 3(43 - 2e) = 93 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 2e \\ 4e + 129 - 6e = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 2e \\ -2e = 93 - 129 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 2e \\ e = 36 : 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 2 \times 18 \\ e = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 43 - 36 \\ e = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ e = 12 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado e a solução é S={(8,12)}.

⇔ Símbolo que se utiliza entre sistemas equivalentes, ou seja, que têm o mesmo conjunto solução.

Lê-se “equivalente a “.

As chavetas indicam a representação da conjunção de condições.

“RESOLVO SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGEBRICAMENTE” – QUESTÃO 3			
Trabalho autónomo: 15 min. + Discussão: 10 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
3	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>Questão 3.1</u>** – Resolve algebricamente pelo método de substituição: $\begin{cases} y=2x \\ 2x+y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x+2x=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 4x=16 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x=16:4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\times 4 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=4 \end{cases}$ C.S.={(4, 8)} Sistema possível e determinado. **<u>Questão 3.2</u>** – Resolve algebricamente pelo método de substituição: $\begin{cases} x+5=5 \\ 2(x-5y)=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2(0-5y)=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -10y=-2y \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -10y+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ C.S.={(0, 0)} Sistema possível e determinado. **<u>Questão 3.3</u>** – Resolve algebricamente pelo método de substituição: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 6-4y+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 6=8 \text{ Igualdade Falsa} \end{cases}$ C.S.={} Sistema impossível. Retas são paralelas, analisar o declive através da	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Consolidar a aplicação do método de substituição para resolução algébrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas. -Reconhecer que a solução de uma sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas é sempre escrito na forma de par ordenado. - Classificar sistemas de equações em função do número de soluções do conjunto solução.

	expressão $y=mx+b$. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o que é pedido. - Não compreender o método de substituição. - Aplicar incorretamente os princípios de equivalência. - Adicionar incorretamente os monómios semelhantes. - Não compreender o formalismo a Álgebra na aplicação da simbologia que envolve sistemas de equações: as chavetas e o símbolo de equivalente. - Não compreender qual a solução do sistema ou não escrever as suas coordenadas corretamente. - Não classificar o sistema ou ter dificuldade em fazê-lo por não ter as classificações presentes ou por falta de compreensão do critério de classificação.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Vamos estabelecer um paralelo com a resolução de uma equação. O que se pretende encontrar? (R: O valor da incógnita.) Ou seja, matematicamente pretende isolar-se a incógnita para que seja possível encontrar o seu valor. - No caso dos sistemas, quantas equações existem? E quantas incógnitas? O que se pretende descobrir? O valor das incógnitas que satisfaçam apenas uma condição ou as duas em simultâneo? - Como fazer isto? Isolar cada uma das incógnitas. E como fazê-lo? Mas a incógnita x de uma equação não é a mesma da outra equação? Então podemos substituir o valor de uma na outra? E o mesmo em relação à incógnita y? Então vamos tentar. - Já tens a solução? Como se indica? - E quantas soluções encontraram? Já podes classificar o sistema? Qual é o critério que usamos? E quais as hipóteses? Como se classifica cada um destes sistemas? - Em caso de erro de manipulação algébrica ou de erros de aritmética, verificar cada caso em particular e fazê-los encontrar o erro por meio de questionamento.	
	- Mostrar as diferentes estratégias de resolução e justificá-las. - Ouvir e respeitar as estratégias dos colegas. - Discutir as várias ideias e chegar a uma conclusão com a turma.	**<u>Professor:</u>** - Deve moderar a discussão de modo a ouvir os alunos e fazer com que respeitem as respostas dos colegas. - Deve estar atento às dúvidas e promover conexões entre as várias representações.	- Reconhecer a principal vantagem do

Discussão em turma **Discussão em turma**	**<u>Considerações de carácter geral:</u>** - Questionam-se os colegas no sentido de haver ou não concordância e se têm outra forma de resolver a questão. - Solicitar sempre as justificações das várias respostas. Deste modo vai havendo a participação coletiva, tentando, assim, que todos os alunos participem na discussão. - Usar questões do tipo: - Concordam com a resposta dada? Porquê? - Alguém resolveu de outra forma? Como? - Compreenderam todos o que os colegas explicaram?	**<u>Sequencia a escolher:</u>** - Dividir o quadro em 3 partes e solicitar a 3 alunos para resolver cada sistema no quadro e classifica-lo. - Fazer a discussão em simultâneo de forma a ver se algum dos alunos tem alguma contribuição que possa enriquecer a discussão. - Explorar quais as representações gráficas que se esperariam nas três situações, principalmente a situação 3.3. Solicitar que identifiquem nesta situação o declive e analisar porque as retas são paralelas. Se for necessário, solicitar aos alunos que usem a calculadora gráfica para verificar se as retas são de facto paralelas. - Se se achar conveniente, podem introduzir as anteriores também. No caso do sistema de 3.2. uma das retas coincide com o eixo das ordenadas, é uma reta vertical de expressão x=0, explorar também esta situação. **<u>A realçar na discussão:</u>** - A classificação de sistemas pode ser feita algebricamente ou graficamente por interpretação do conjunto solução resultante da interseção dos gráficos das retas consideradas. - A solução pode ser dada graficamente com algum rigor mas para ter a certeza, substituir nas equações do sistema e verificar que é mesmo a solução procurada. - Em alguns casos a representação gráfica não nos dá a solução exata pelo que temos que recorrer ao método algébrico, método de substituição, para a conseguir. - Realçar a vantagem e os cuidados a ter no	método de substituição em relação à representação gráfica. - Classificar sistemas de equações pelo número de soluções que compõem o conjunto solução. - Compreender o significado dos símbolos de igual e das chavetas usadas na representação algébrica do sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

		manuseamento algébrico. - Explicitar o significado de cada símbolo utilizado e qual a sua utilidade na resolução dos sistemas de equação.	

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 202 – exercícios 4 e 5 + página 204.

ANEXO XV – Planificação e recursos da Aula 6 – 09 de maio de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 6 – 09/maio/2016 – ENTREVISTAS - 45 min.
"Aplico o que Aprendi 2" – Realização de uma tarefa com duas questões seguida de entrevista.

OBJETIVOS GERAIS
- Aplicação e consolidação da matéria dada com recolha de dados da turma toda e com entrevistas aos pares escolhidos. - Tarefa 1: Problema com contexto da vida real dado em linguagem natural. Objetivo: Analisar a interpretação de dados do problema sem dar a definição das incógnitas, no sentido de analisar que significados os alunos atribuem às incógnitas e como as escolhem. Promover a aplicação do método de substituição e, assim, analisar como tem evoluído o significado atribuído pelos alunos aos símbolos e à formalidade algébrica. - Tarefa 2: Problema com contexto geométrico e dados indicados na figura. Objetivo: Analisar como manuseiam a informação disponibilizada no contexto da geometria. Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas, a e b definidas na imagem. Percecionar como os alunos relacionam estas informações e de que forma utilizam os conhecimentos prévios sobre as propriedades dos triângulos.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação da tarefa; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões 1 e 2; *(v)* Entrega da tarefa não realizada na aula 2 sobre a interpretação geométrica de sistemas de equações para os alunos que tenham concluído as tarefas 1 e 2.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Exercícios de aplicação sobre a matéria dada. - Trabalho a pares.

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - QUESTÕES 1 E 2 – 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm os restantes 40 minutos para a realização das duas questões da tarefa. Esclarecer os alunos que não haverá discussão desta tarefa e que será entregue na próxima aula com feedback.

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - QUESTÕES 1 E 2 (restantes 40 min.)
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir.

4.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS – Recolha dos enunciados
Recolher as resoluções dos alunos para entregar com feedback. Recolher os trabalhos de casa dos alunos. Entregar a ficha da aula anterior com o feedback feito.

5. º ENTREVISTAS – APÓS
Entrevistas semiestruturas feitas aos pares escolhidos e com autorização dos Encarregados de Educação.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

“APLICO O QUE APRENDI 2” – TAREFAS “Os iogurtes para o acampamento” e “O triângulo isósceles”			
Trabalho autónomo: 40 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Usar representação pictórica e estratégia tentativa-erro para encontrar a resposta. **2.ª Estratégia** – Usar representação aritmética e estratégia tentativa-erro para encontrar a resposta. **3.ª Estratégia** – Usar representação algébrica e o método de substituição como estratégia de resolução. Reconhece que *x* é o número de embalagens de 4 iogurtes e *y* é o número de embalagens de seis iogurtes. Reconhece as relações entre as incógnitas e faz a tradução de linguagem verbal para linguagem matemática. Constrói o sistema e resolve-o pelo método de substituição (a formalização deste método pode ainda não estar totalmente correta, podendo aproximar-se): $\begin{cases} x+y=12 \\ 4x+6y=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ 2x+3y=29 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ 2(52-y)+3y=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ 24-2y+3y=29 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ y=29-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-5 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ R: Os amigos compraram 7 embalagens de 4 iogurtes e	**Professor:** - Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Consolidar a aplicação do método de substituição - Analisar que significados os alunos atribuem às quantidades desconhecidas. - Analisar a representação utilizada, a estratégia e como traduzem o problema para a resolução do mesmo. - Analisar o contexto da resposta.

	5 embalagens de 6 iogurtes. **Dificuldades:** - Não compreender o contexto. - Não compreender como definir as incógnitas. - Definir as incógnitas com linguagem deficiente e não explicitamente. - Não compreender como construir o sistema. - Não aplicar corretamente os princípios de equivalência. - Não apresentar o sistema cm a formalização algébrica correta. -Não apresentar resposta e/ou não inseri-la no contexto do problema.	**Apoio a Prestar:** - Que situação é descrita? Explica-me por palavras tuas. - Quais as perguntas? Quais as quantidades desconhecidas que se pretende conhecer? - Que relações sabemos que existem entre essas quantidades? Quais as informações numéricas dadas no enunciado? Como podemos traduzir essas relações para a matemática? - Necessitamos de quê? Como indicar as quantidades desconhecidas? - Como aplicar os princípios de equivalência?	
2	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Reconhecer e traduzir para linguagem matemática os dados do problema, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^0 e num triângulo, a ângulo de igual amplitude opõem-se lados de igual comprimento. - Construir o sistema de duas equações e resolver pelo método de substituição.	**Professor:** - Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	-Promover um manuseamento simples e algébrico com a substituição de uma das incógnitas. - Enquadrar face ao contexto a resposta numérica obtida.

	$\begin{cases}(2a+20)+(2b-10)+(a+30)=180\\2b-10=a+30\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b+40=180\\2b=a+40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(2b-40)+2b=180-40\\a=2b-40\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}6b+2b=180+120\\-----\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8b=300\\-----\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{300}{8}\\-----\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{75}{2}\\a=2\times\frac{75}{2}-40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=37,5^{o}\\a=75-40=35^{o}\end{cases}$ R: o ângulo *a* tem 35º de amplitude e o *b* tem 37,5º. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado. - Não reconhecer as incógnitas a e b. - Não reconhecer a propriedade que relaciona a soma dos ângulos internos de um triângulo. - Não reconhecer a propriedade que relaciona dois ângulos num triângulo isósceles. - Não efetuar os princípios de equivalência. - Erros algébricos. - Ter dificuldade na escrita da resposta ou na organização dos cálculos. - Não responde corretamente face ao contexto.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Quais os dados que o enunciado? - Quais as incógnitas? São referidas? Onde e como? - Quais as propriedades de um triângulo que conhecemos que permite relacionar os ângulos? - Qual a classificação do triângulo considerado? Quais as suas propriedades? Como relacionar ângulos? - O valor obtido como resposta, como deve ser interpretado? Responde à questão colocada? - Quais as unidades das incógnitas?	

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 207 – exercícios 8 ao 12.

GUIÃO DA ENTREVISTA DA 6.ª INTERVENÇÃO LETIVA:	
Questão geral	- Qual das tarefas teve maior nível de dificuldade? Porquê? - A dificuldade foi sentida a nível da leitura do enunciado ou nos conhecimentos que precisavam para as fazer?
QUESTÃO 1	- O enunciado do problema foi claro? - Qual a dificuldade maior na leitura do enunciado? - Como definiram as incógnitas? - Qual a razão / lógica das letras escolhidas para representam cada incógnita? - Foi difícil compreender o significado de cada letra? - Hesitaram entre cada letra representar o número de embalagens ou o número de iogurtes? - A resolução algébrica foi feita como? Porquê? - A estratégia escolhida pareceu-vos adequada? - Escolhiam outra, agora, depois se saber a solução, ou mantinham a mesma resolução? - A solução fez sentido face ao contexto do problema? - Qual a unidade das incógnitas (embalagens ou iogurtes)?
QUESTÃO 2	- O enunciado do problema foi claro? - Qual a dificuldade maior na leitura do enunciado? - Qual o significado das letras a e b? - Quais são as incógnitas do sistema? - Quais as propriedades dos triângulos que utilizaram? - Tinham bem presente as propriedades ou custou muito lembrarem-se delas? - A resolução algébrica foi feita como? Porquê? - A estratégia escolhida pareceu-vos adequada? - Escolhiam outra, agora, depois se saber a solução, ou mantinham a mesma resolução? - A solução fez sentido face ao contexto do problema? - Qual a unidade das incógnitas (graus ou não tem unidade)?

ANEXO XVI – Planificação e recursos da Aula 7 – 11 de maio de 2016

ASPETOS GERAIS

Aula 7 – 11/maio/2016 – ENTREVISTAS - 90 min.
"Aplico o que Aprendi 3" – Realização de uma ficha com tarefas de consolidação.

OBJETIVOS GERAIS
- Aplicação e consolidação da matéria dada com recolha de dados da turma toda e com questionamento aos pares escolhidos durante a aula. - Tarefas descontextualizadas: Três tarefas descontextualizadas (abstração matemática). Objetivo: Analisar a interpretação dos enunciados e as estratégias usadas para resolução das tarefas. Analisar os manuseamentos algébricos efetuados. - Tarefas com contexto próximo ao real: Dois problemas com contexto da vida real dado em linguagem natural. Objetivo: Analisar a interpretação de dados do problema sem dar a definição das incógnitas, no sentido de analisar que significados os alunos atribuem às letras em questão. Promover desenvolvimento do pensamento algébrico motivando para a aplicação do método de substituição.

ESTRUTURA DA AULA
A aula estará dividida nos seguintes momentos: *(i)* Entrada na sala de aula e escrita do sumário no quadro; *(ii)* Breve Introdução com apresentação da tarefa; *(iii)* Trabalho autónomo dos alunos, realizados a pares, com a resolução das questões da ficha.

RECURSOS A USAR
- Ficha de trabalho com a tarefa – um enunciado para cada par de alunos com registo a caneta.

MOMENTOS DA AULA

1.º SUMÁRIO DAS LIÇÕES
Resolução da tarefa "Aplico o que aprendi 3".

2.º APRESENTAÇÃO DA FICHA DE TRABALHO - 5 min.
Explicar aos alunos que a aula será dedicada à resolução de uma ficha de trabalho. Explicar aos alunos que deverão trabalhar a pares, com registo numa folha única e que devem usar a caneta. Informar os alunos que têm os restantes 40 minutos para a realização das duas questões da tarefa. Esclarecer os alunos que não haverá discussão desta tarefa e que será entregue na próxima aula com feedback.

3.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS - 75 min.
Os alunos iniciam a resolução a pares e as professoras irão circular pela sala, retirando as dúvidas que surjam conforme plano adiante discriminado. Caso se verifique algum par sem trabalhar ou que se perceba estar com dúvidas impeditivas, serão abordados e através do questionamento tentar-se-á que as dificuldades sejam ultrapassadas. Serão valorizadas as várias estratégias de resolução que possam surgir.

4.º TRABALHO AUTÓNOMO DOS ALUNOS – Recolha dos enunciados
Recolher as resoluções dos alunos para entregar com *feedback*. Entrega das fichas da aula anterior com *feedback*.

5. º PREENCHIMENTO DO QUESTIONÁRIO ANÓNIMO – 10 min.
Entregar o questionário para resposta e recolher sem a identificação do aluno.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

“APLICO O QUE APRENDI 3”			
Trabalho autónomo: 75 min.			
Questão	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Atividade do professor / Aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1	**Respostas Previstas:** **1.ª Estratégia** – Averiguar se cada uma das alíneas é solução do sistema por substituição dos pares ordenados, reconhecendo que é solução o par ordenado que resultar em duas proposições verdadeiras. Indicar a opção correta. $\begin{cases}-2+8=6\\-2-8=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6=6 \text{ P. verd.}\\-10=-10 \text{ P. verd.}\end{cases}$ $\begin{cases}2+(-8)=6\\2-(-8)=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=6 \text{ P. falsa}\\10=-10 \text{ P. falsa}\end{cases}$ $\begin{cases}2+8=6\\2-8=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10=6 \text{ P. falsa}\\-6=-10 \text{ P. falsa}\end{cases}$ $\begin{cases}-2-8=6\\-2-(-8)=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10=6 \text{ P. falsa}\\6=-10 \text{ P. falsa}\end{cases}$ R: Opção correta é A, o ponto (-2, 8) é solução do sistema. **2.ª Estratégia** – Resolver o sistema de equações pelo método de substituição algébrica e obter a solução do sistema. Indicar a opção correta. $\begin{cases}x+y=6\\x-y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-y\\6-y-y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-y\\-2y=-10-6\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-y\\-2y=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-8\\y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=8\end{cases}$ R: Opção correta é A, o ponto (-2, 8) é solução do sistema.	**Professor:** - Analisar as dificuldades de arranque do trabalho autónomo. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer que uma solução de um sistema transforma as equações em duas proposições verdadeiras. - Reconhecer que a resolução, algébrica ou gráfica, de um sistema de duas equações, conduz à solução do problema. - Manuseamento algébrico simples.

<table>
<tr><td></td><td><u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o enunciado.
- Não compreender quando um par ordenado é solução de um sistema de duas equações
- Não aplicar corretamente os princípios de equivalência.
- Não assinalar a resposta / opção correta.</td><td><u>Apoio a Prestar:</u>
- Como verificar se um par ordenado é solução de um sistema de 2 equações?
- O que temos que verificar em cada uma das equações?
- Se resolvermos pelo método de substituição o que iremos encontrar no final?</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td><u>Respostas Previstas:</u>
<u>1.ª Estratégia</u> – Representação pictórica ou aritmética com estratégia tentativa-erro.

<u>2.ª Estratégia</u> – Representação algébrica com aplicação do método de substituição. Reconhecer as incógnitas e indicar os seus significados, por exemplo: c é o número de coelhos e g é o número de galinhas. Reconhecer as relações entre as incógnitas e construir o sistema:
$\begin{cases} c+g=58 \\ 4c+2g=152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g=58-c \\ 2c+g=76 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} g=58-c \\ 2c+58-c=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g=58-c \\ c=76-58 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} g=58-18 \\ c=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g=40 \\ c=18 \end{cases}$
R: A avó do Joaquim tem 18 coelhos e 40 galinhas.

<u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o enunciado ou o contexto.</td><td><u>Professor:</u>
- Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado.
- Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto.
- Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.

<u>Apoio a Prestar:</u>
- Que situação é descrita? Explica-me por palavras tuas.
- Quais as perguntas? Quais as quantidades desconhecidas que se pretende conhecer?
- Que relações sabemos que existem entre essas</td><td>- Interpretar o contexto em linguagem verbal e traduzir para linguagem algébrica.

-Definir as incógnitas e reconhecer as relações existentes entre ambas e relatadas no enunciado (tradução).

-Promover um manuseamento algébrico na resolução de sistema de duas equações.</td></tr>
</table>

	- Não consegue identificar as incógnitas face ao contexto. - Definir incorretamente as incógnitas. - Não efetuar os princípios de equivalência corretamente. - Cometer erros algébricos na resolução do método de substituição. -Ter dificuldade na escrita da resposta ou na organização dos cálculos. - Não responde corretamente face ao contexto.	quantidades? Quais as informações numéricas dadas no enunciado? Como podemos traduzir essas relações para a matemática? - Necessitamos de quê? Como indicar as quantidades desconhecidas? - Como aplicar os princípios de equivalência?	- Enquadrar face ao contexto a resposta numérica obtida.
3	<u>**Respostas Previstas:**</u> <u>**1.ª Estratégia**</u> – Representação gráfica das equações na calculadora gráfica. <u>**2.ª Estratégia**</u> – Representação algébrica com aplicação do método de substituição. (A) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x=2-\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 4x=2-\frac{1-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 4x=\frac{4-1+2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 8x=3+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 6x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2\times\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ C.S.=$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right\}$ Possível determinado	<u>**Professor:**</u> - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer a aplicação dos vários tipos de representação e estratégias para resolução de sistemas de equação. -Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas. - Manuseamento da calculadora gráfica para resolução de sistemas de duas

<table>
<tr>
<td></td>
<td>(B) $\begin{cases} y=-3y-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3y=-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-3x-2)=-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x-8=-4-3x \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x+3x=-4+8 \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x=4 \\ y=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{9} \\ y=-3\left(-\frac{4}{9}\right)-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{9} \\ y=\frac{4}{3}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{9} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$
C.S.=$\left\{\left(-\frac{4}{9},-\frac{2}{3}\right)\right\}$ Possível determinado

(C) $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=-\frac{x}{2}+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ -x+6=-\frac{x}{2}+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ -2x+12=-x+10 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ -2x+x=10-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+6 \\ -x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2+6 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$ C.S.=$\{(2,4)\}$ Possível determinado

<u>Dificuldades:</u>
- Não compreender o enunciado.
- Não compreender a aplicação do método de substituição.
- Não aplicar corretamente os princípios de equivalência.
- Não assinalar a resposta / opção correta.
- Ter dificuldade em manusear a calculadora gráfica.
-Não saber interpretar as soluções face ao contexto.</td>
<td><u>Apoio a Prestar:</u>
- Como podemos resolver sistemas?
- Quantos métodos trabalhamos nas aulas que nos permitam resolver sistemas de equações?
- Optando por um como procedemos?
- Algebricamente: O que fazer?
- Graficamente: O que fazer?
- Qual ou quais as soluções para cada sistema?
- Como classificar os sistemas? Em função de quê?</td>
<td>equações.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><u>Respostas Previstas:</u></td>
<td><u>Professor:</u>
- Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do</td>
<td>- Analisar como</td>
</tr>
</table>

4.1	Definição das incógnitas, por exemplo: - f idade atual do Fernando - m idade atual da Maria. Construção do sistema de 2 equações depois de estabelecer as relações entre as incógnitas: $\begin{cases} 2f+4m=12 \\ f-10=2(m-10) \end{cases}$ **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado/contexto - Não identificar as incógnitas corretamente. - Não estabelecer as relações corretamente. - Não distinguir a diferença temporal referida no enunciado.	enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas. **<u>Apoio a Prestar:</u>** - Quais as quantidades desconhecidas que se pretende conhecer? Como estabelecer as incógnitas? - Que situação é descrita? A quantas épocas se refere o enunciado? Como definir essas épocas? - Que relações sabemos que existem entre essas quantidades? Quais as informações numéricas dadas no enunciado? Como podemos traduzir essas relações para a matemática?	interpretam e traduzem a informação disponibilizada no contexto da geometria. - Reconhecer a formalização de um sistema de equações.
4.2	**<u>Respostas Previstas:</u>** **<u>1.ª Estratégia</u>** – Representação pictórica ou numérica e estratégia tentativa-erro. **<u>2.ª Estratégia</u>** – Representação gráfica com utilização da calculadora gráfica. Introduzir as duas equações encontradas na alínea anterior. **<u>3.ª Estratégia</u>** – Representação algébrica com utilização do método de substituição, construído na alínea anterior.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	-Manuseamento e formalização algébricos em função das duas incógnitas. - Interpretar a solução face ao contexto do problema, apesar de ser possível do ponto de vista matemático.

	$\begin{cases}2f+4m=12\\ f-10=2(m-10)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f+2m=6\\ f-10=2m-20\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f=6-2m\\ 6-2m-10=2m-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f=6-2m\\ 6-2m-10=2m-20\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f=6-2m\\ -2m-2m=-20+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f=6-2m\\ -4m=-16\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f=6-2\times 4\\ m=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f=-2\\ m=4\end{cases}$ R: A idade do Fernando seria negativa pelo que as afirmações que fez sobre as idades não estão corretas. O problema é impossível do ponto de vista do contexto. O conjunto solução é o ponto (-2, 4). **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreender o enunciado. - Não aplicar corretamente os princípios de equivalência. - Cometer erros de cálculo na aplicação do método de substituição. - Não reconhecer que a resposta é possível matematicamente mas não o é em relação ao contexto, pois não existem idades negativas.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - Como aplicar os princípios de equivalência? - Como usar a calculadora gráfica na resolução de sistemas? O que obtemos no final com este recurso? - A resposta, como a classifica? E o sistema, qual a sua classificação? - O conjunto solução obtido permite classificar o sistema de que forma? - A resposta encontrada é aceite do ponto de vista da realidade? Porquê? - Como devemos responder nestes casos?	
	<u>Respostas Previstas:</u> Sabendo que o par (5, 4) é solução do sistema, reconhece que x=5 e y=4 e substitui no sistema. Em seguida resolve o novo sistema em ordem a a e b, que são as novas incógnitas.	**<u>Professor:</u>** - Deve acompanhar e esclarecer as dúvidas do enunciado. - Analisar se o trabalho está a ser feito em conjunto. - Usar o questionamento para ultrapassar as dificuldades sentidas.	- Reconhecer a solução de um

5	$\begin{cases} 5-4=a \\ b\times5-2\times4=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ 5b-8=18 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ 5b=18+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ 5b=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{26}{5} \end{cases}$ R: O valor de a é 1 e o de b é $\frac{26}{5}=5,2$. **<u>Dificuldades:</u>** - Não compreende o enunciado. - Não compreende o sistema porque tem 4 incógnitas. - Não reconhece a solução do sistema, ou seja, que $(x, y) = (5, 4)$. - Indica erradamente que a solução do sistema é $(a, b) = (5, 4)$. - Não reconhece que tem que resolver o sistema em ordem a *a* e a *b*, depois de substituir os valores de *x* e de *y* ou substitui em *a* e *b* e tenta resolver em ordem a *x* e a *y*.	**<u>Apoio a Prestar:</u>** - O que significa ser solução do sistema? - Quais os valores que temos que descobrir? Poderá (a, b) ser a solução do sistema? - Se $(x, y) = (5, 4)$ é a solução do sistema, o que podemos fazer para resolvê-lo em ordem a *a* e *b*? - Se substituímos *x* e *y* pelos respetivos valores, como fazer para resolver o sistema em ordem a *a* e a *b*? - Como aplicar os princípios de equivalência?	sistema de equações. - Reconhecer o significado de incógnita. -Manuseamento algébrico em função das duas incógnitas.

EXERCÍCIOS DO LIVRO:
Manual página 202 – exercícios 3, 4 e 5.

ANEXO XVII – Questionário Anónimo

ESCOLA EB 2,3 FERNANDO PESSOA – 2015/2016

Inquérito aos alunos – 8.º 1.ª

Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

1. Na tua opinião, os enunciados das tarefas foram claros? Qual a maior dificuldade sentida?

____

____

____

____

2. A calculadora gráfica foi utilizada na resolução de sistemas de equações no decorrer das aulas. Foi fácil trabalhar com esse recurso? Qual a tua principal dificuldade?

____

____

____

____

3. Qual é, na tua opinião, a maior vantagem da calculadora gráfica? E desvantagem?

____

____

____

____

4. Na resolução de sistemas de equações, preferes utilizar a calculadora gráfica ou o método de substituição (algébrico)? Explica os teus motivos e em que situações a calculadora gráfica é uma mais-valia.

____

____

____

____

Muito obrigada pela participação! Espero que a minha colaboração tenha sido útil na tua aprendizagem.

Vanda Patrício

ANEXO XVIII – Pedido de autorização entregue no início do ano letivo

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Sou aluna do Mestrado em Ensino da Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, chamo-me Vanda Patrício e estou a realizar o estágio pedagógico na Escola E.B.2,3 de Fernando Pessoa, nos Olivais, no presente ano letivo. Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário recolher dados em contexto de sala de aula na turma do(a) seu (sua) educando(a). Desta forma, serão objeto de análise os materiais produzidos em aula pelos alunos, que poderão ser complementados com transcrições de entrevistas a realizar, bem como gravação áudio/vídeo de alguns momentos da aula, com particular foco na atuação do professor.

Em todo o processo, comprometo-me a salvaguardar os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu (sua) educando(a). Da participação neste trabalho não resultará qualquer prejuízo para o(a) aluno(a), podendo, pelo contrário, trazer-lhe benefícios na aprendizagem da Matemática. Deste modo, solicito a sua colaboração no sentido de conceder autorização para a referida recolha de dados.

Do acima exposto, e agradecendo desde a colaboração, solicito a devolução do destacável assinado à Professora de Matemática, Professora Cláudia Torres, caso a autorização seja concedida.

Com os melhores cumprimentos.

Olivais, 7 de Outubro de 2015

Eu, ____, declaro que autorizo o meu educando ____ n.º ______ do 8º 1ª, a participar no estudo a realizar-se no âmbito da dissertação de Mestrado.

Olivais, _____ / _____ / __________

Assinatura: ____

ANEXO XIX – Pedido de autorização para participação no estudo de forma mais próxima

Exmo.(a) Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

Olivais, 08 de abril de 2016

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, eu, Vanda Cristina de Caria Patrício, encontro-me a desenvolver um estudo sobre o Pensamento Algébrico dos alunos do 8.º ano. Este estudo servirá de base ao relatório final de estágio, contudo, será necessário proceder à recolha de dados para que o objetivo seja plenamente alcançado. Neste sentido, venho solicitar a autorização para a participação do Vosso educando neste trabalho com a recolha de trabalhos escritos produzidos durante as aulas de Matemática, de eventuais registos áudio/vídeo de alguns momentos das aulas e na realização de pequenas entrevistas de caráter informativo sobre os trabalhos produzidos em sala de aula.

Todo o meu trabalho será supervisionado pela Professora Titular da turma, a Professora Cláudia Torres e todos os direitos e interesses dos alunos serão salvaguardados e respeitados. A fim de preservar a integridade do seu educando, e assegurando a melhor ética profissional, a identidade do aluno será totalmente preservada e a informação recolhida será utilizada apenas no âmbito académico. Desta forma, apelo à Vossa colaboração e compreensão no sentido de permitir que o aluno faça parte deste estudo que pode ser, até mesmo para o próprio, uma experiência enriquecedora.

Agradeço desde já a colaboração prestada por V. Ex.ª, solicitando o preenchimento da seguinte autorização que deverá ser entregue à professora de Matemática, Professora Cláudia Torres.

Atenciosamente

A professora estagiária,

____

(Vanda Patrício)

Eu, Encarregado de Educação do aluno ______________________________ n.º ___ da Turma do 8.º 1.ª, autorizo o meu educando a participar no estudo supracitado.

Assinatura

____

Data: ____/ ____/ 2016